Hoofdstuk 3

Tellen: oplossingen

Oplossing 5

Enkelspel: kies 2 uit 6, dus $\binom{6}{2}$.
Dubbelspel: kies 2 uit 6, en 2 uit overblijvende 4. Volgorde van ploegen speelt geen rol, dus delen door 2. Dus $\dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2} = \ldots$

Oplossing 6

Kies eerste punt: n *manieren; kies tweede punt:* $n-1$ *manieren. Bepaalt samen eerste rechte.*
Kies derde punt en vierde punt: $(n-2)(n-3)$ *manieren.*
Op hoeveel manieren had je die $2+2$ *punten kunnen kiezen? Het eerste punt had je op 4 manieren kunnen kiezen, het tweede ligt dan vast (nl. via rechte); het derde punt had je op 2 manieren kunnen kiezen.*
$\dfrac{1}{8}n(n-1)(n-2)(n-3)$

Oplossing 7

Aantal keuzes voor elk teken vermenigvuldigen: $26\cdot25\cdot24\cdot23 \;\cdot\; 26\cdot25\cdot24 \;\cdot\; 10\cdot9$.

Oplossing 8

1. *Hoeveel dergelijke getallen zijn er?* 5^3
2. *Wat is het volgnummer van 251, 333 en 454?* $46e, 63e, 99e$
3. *Welk getal staat op de 21e plaats?* 151

Oplossing 9

$\binom{12}{6}\binom{6}{4}$

Voor tweede vraag: ga alle gevallen af, en tel bijhorende getallen op.

$$\begin{array}{rrr} 6 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \end{array}$$

geeft

$$\binom{12}{6}\left[\binom{6}{5}+\binom{6}{4}+\binom{6}{3}\right]+\binom{12}{7}\left[\binom{5}{4}+\binom{5}{3}\right]+\binom{12}{8}\left[\binom{4}{3}+\binom{4}{2}\right]+\binom{12}{9}\binom{3}{2}+\binom{12}{10}\binom{2}{1}$$

Oplossing 11

Tussen 1500 en 2000 zitten er $1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7$,
tussen 2000 en 4000 zitten er $2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$.
Samen: $(5 + 18) \cdot 8 \cdot 7 = 1288$.

Oplossing 12

$5\sum_{i=1}^{12} i < 32 \cdot 12 \Leftrightarrow 13 \cdot 6 \cdot 5 < 32 \cdot 12 \Leftrightarrow 13 \cdot 5 < 32 \cdot 2$. *Neen dus.*

Oplossing 13

Kies voor de rode rozenstruiken 4 van de 12 plaatsen, etc. Antwoord: $\binom{12}{4}\binom{8}{5}$.

Oplossing 14

1. *ANAGRAM* $\frac{7!}{3!} = 840$.
2. *BANANENBOOT* $\frac{11!}{2!2!3!2!1!1!} = 831600$.
3. *HOTTENTOTTENTENTENTENTOONSTELLING grapje...*

Redenering voor woord van n letters: voor eerste plaats heb je n keuzes, voor tweede plaats nog $n - 1$,...
Eens het anagram gevormd is, zie je dat gelijke letters niet van elkaar onderscheiden kunnen worden, dus heb je $x!$ keer hetzelfde anagram gemaakt wat die bepaalde letter betreft.

Oplossing 15

Bij 0 *hoort* 0*, bij* 1 *hoort* 0 *en* 1*, bij* 2 *hoort* 0,1 *en* 2*. Totale aantal (van* 0 *tot* 6*) is dus* $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$.

Oplossing 16

1. *Alle schapen in 1 kooi (die kooi valt op 4 manieren te kiezen)*
   dus 5 wolven verdelen over 3 kooien (zoals frequentietabel), dat is nog $\overline{\binom{3}{5}} = \binom{7}{5}$.
   Vermenigvuldigen geeft $4 \cdot 21 = 84$.
2. *Alle schapen in 2 kooien (waarbij minstens 1 schaap in elke kooi, anders zit je in geval 1):*
   welke kooi? 2 uit 4 kiezen, is $\binom{4}{2}$.
   nog 8 schapen te verdelen over 2 kooien, is $\overline{\binom{2}{8}}$.
   nog 5 wolven te verdelen over 2 kooien, is $\overline{\binom{2}{5}}$.
   Samen: $\binom{4}{2}\binom{9}{8}\binom{6}{5} = 6 \cdot 9 \cdot 6 = 324$.
3. *Alle schapen in 3 kooien waarbij geen enkele kooi leeg mag zijn (anders zitten we in andere gevallen).*
   welke kooi? 3 uit 4 kiezen.
   in elke kooi minstens 1 schaap, dus nog 7 schapen over 3 kooien.
   alle wolven in 1 kooi: 1
   Samen: $4\binom{9}{7} = 4 \cdot 36 = 144$.
4. *SOM:* $84 + 324 + 144 = 552$.

Hoofdstuk 4

Voortbrengende functies: oplossingen

Oplossing 3

$1 - 2x + x^2$

Oplossing 4

1. $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$
2. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^3 + x^5)$
3. $(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots)$
4. $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)$
5. $(x^4 + x^5 + x^6 + \ldots)(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)$

Oplossing 4

$a_k = k$ *uit* $M = 2xM - x^2M + x$

Oplossing 6

$$\frac{10^n - 6^n}{2}$$

Oplossing 7

$$M = \frac{2 - 3x + x^2}{1 - x + 3x^2 - x^3}$$

Oplossing 11

1. $s_n = 3^n - n3^{n-1}$

Hoofdstuk 5

Modulorekenen: oplossingen

Oplossing 1

13

Oplossing 2

307

Oplossing 3

121

Oplossing 5

$21 + k \cdot 210, k \in \boldsymbol{Z}$

Oplossing 6

$113 + k \cdot 180, k \in \boldsymbol{Z}$

Oplossing 7

25, *maar niet via stelling te vinden (eerder trial and error).*

Hoofdstuk 7

Eindige velden: oplossingen

Oplossing 3

1. $(1 + x)^2(1 + x + x^2)$
2. *niet reduciebel*
3. $(1 + x)^3$
4. $(1 + x)^4$
5. *niet reduciebel*
6. $(1 + x + x^2)^2$
7. *niet reduciebel*
8. *niet reduciebel*