Bijlage A Simplex-methode

Verreweg de meeste LP-problemen worden opgelost met behulp van het zogenoemde *Simplex-algoritme*, in 1947 ontwikkeld door G.B. Dantzig. De meeste computerfirma's hebben wel een programmapakket ontwikkeld dat is gebaseerd op deze Simplex-methode. Daarmee kunnen ook de grootste LP-modellen worden opgelost. Een beetje LP-model voor een praktijkprobleem heeft al gauw enkele tientallen tot honderden variabelen en enkele honderden tot soms duizenden restricties. Vooral de LP-modellen uit de olie-industrie zijn bekend om hun enorme grootte.
Wij bespreken in deze bijlage aan de hand van eenvoudige voorbeelden eerst een elementaire vorm van het Simplex-algoritme, het zogenoemde standaard Simplex-algoritme. Hiermee kunnen maximaliseringsproblemen worden opgelost die uitsluitend 'kleiner/gelijk-restricties' hebben met positieve rechterleden. Dit algoritme wordt behandeld in deel 1. In deel 2 wordt de *tweefasen-methode* behandeld, waarmee ook de algemene LP-problemen kunnen worden opgelost. Ten slotte wordt in deel 3 ingegaan op een meer wiskundige aanpak van de gevoeligheidsanalyse.

Deel 1 Standaard Simplex-algoritme

Het Simplex-algoritme wordt uitgelegd aan de hand van een planningsprobleem, waar twee producten worden gemaakt onder drie beperkende voorwaarden. De bijdrage aan de winst moet worden gemaximaliseerd. Het bij dit probleem behorende wiskundige model is:

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\text{Maximaliseer } z = 30x_1 + 20x_2 & & & & & & \\
\text{m.b.t.} & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 140 & \text{[boren]} \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 160 & \text{[draaien]} \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 90 & \text{[frezen]} \\
 & x_1, x_2 & & & \geq & 0 &
\end{array}
\qquad \text{[I]}
$$

De eerste stap is dat we de drie ongelijkheidsrestricties gaan schrijven als gelijkheden. We kunnen dit bereiken door aan elke restrictie een extra variabele toe te voegen. Dit LP-probleem kan dan op de volgende manier worden herschreven (waarbij ook de doelfunctie op nul is herleid):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
z - 30x_1 & - & 20x_2 & & & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 140 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_4 & = & 160 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_5 & = & 90
\end{array}
\qquad \text{[II]}
$$

De variabelen x_3, x_4 en x_5 worden spelingsvariabelen genoemd, in het Engels *slack variables*. Men zou ze kunnen interpreteren als niet-gebruikte capaciteitseenheden van de diverse capaciteitssoorten. Ook aan deze spelingsvariabelen stellen we de eis dat ze niet-negatief mogen zijn.
Het stelsel [II] is een stelsel van vier lineaire vergelijkingen met zes onbekenden, en daarmee dus onbepaald. Dat wil zeggen dat er in principe oneindig veel oplossingen bestaan. Wij zoeken nu díe oplossing waarvoor z zo groot mogelijk is.

Eén oplossing is vrij gemakkelijk te bepalen: stelt men $x_1 = x_2 = 0$, dan vinden we: $x_3 = 140$, $x_4 = 160$, $x_5 = 90$ en $z = 0$. Zo'n oplossing van het stelsel, die men vindt door de echte variabelen gelijk aan nul te kiezen, heet een basisoplossing.
We kunnen het stelsel [II] in een zogenoemd *eerste Simplex-tableau* schrijven, zie tabel 1.

Tabel 1 Eerste Simplex-tableau

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	−30	−20	0	0	0	0
x_3	0	2*	1	1	0	0	140
x_4	0	1	2	0	1	0	160
x_5	0	1	1	0	0	1	90

De eerste kolom wordt de basis genoemd, hierin staan de basisvariabelen die gezamenlijk de basisoplossing vormen. De meest rechtse kolom bevat de getalswaarden van die oplossing en wordt het rechterlid (RL) genoemd, in het Engels: *right-hand-side*. De variabelen die niet in de basis zitten, zijn per definitie gelijk aan nul. In dit voorbeeld dus x_1 en x_2. Een basisoplossing heeft altijd naast de variabele z nog zoveel variabelen ongelijk aan nul als er beperkingen zijn.
De volgende stap is nu een andere basisoplossing te zoeken die aan twee eisen moet voldoen:
- de nieuwe basisoplossing levert een z-waarde die niet lager is dan de huidige;
- de nieuwe basisoplossing moet ook een toelaatbare oplossing zijn.

Als we de z-rij bekijken, zien we dat we de waarde van z groter kunnen maken door óf x_1, óf x_2 positief te maken. De grootste bijdrage levert natuurlijk x_1; dat wil zeggen dat we x_1 in de basis zouden willen opnemen en dat dus een van de huidige basisvariabelen daaruit moet verdwijnen. Om een toelaatbare oplossing te handhaven en daarmee dus aan de tweede eis te voldoen, kunnen we x_1 niet verder verhogen dan het minimum van $\frac{140}{2}$, $\frac{160}{1}$ en $\frac{90}{1}$. Zie de x_1-kolom in het eerste Simplex-tableau. Dat wil dus zeggen dat we x_1 met 70 eenheden kunnen vergroten en ook dat x_3 uit de basis verdwijnt: in de x_3-rij vinden we immers dat minimum.
Op deze manier vinden we op het kruispunt van de x_1-kolom en de x_3-rij een element dat we het *pivot-element* noemen. Het is in het eerste Simplex-tableau van een sterretje (*) voorzien.
Om een nieuwe basisoplossing te krijgen, met een hogere z-waarde en waar x_1 in de basis zit ten koste van x_3, gaan we *pivoten* om het pivot-element heen. Dit komt erop neer dat we met behulp van de pivot-rij de pivot-kolom gaan schoonvegen, zodanig dat het pivot-element de waarde 1 krijgt en de overige kolom-elementen de waarde 0 krijgen. De bewerkingen hiervoor zijn dan:
1 Vermenigvuldig de x_3-rij met $\frac{1}{2}$.
2 Vermenigvuldig vervolgens de x_3-rij met 30 en tel deze op bij de z-rij.
3 Vermenigvuldig de x_3-rij met −1 en tel deze op bij de x_4-rij.
4 Vermenigvuldig de x_3-rij met −1 en tel deze op bij de x_5-rij.

Na dit pivoten krijgen we een tweede Simplex-tableau, zie tabel 2.

Tabel 2 Tweede Simplex-tableau

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	−5	15	0	0	2100
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	70
x_4	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	90
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$*	$-\frac{1}{2}$	0	1	20

We vragen ons nu af of we de optimale oplossing hebben gevonden of dat we de z-waarde van 2100 nog verder kunnen verhogen. In de z-rij zien we dat de z-waarde nog verder kan worden verhoogd door x_2 te verhogen. Om aan de eis van toelaatbaarheid van de oplossing te blijven voldoen, kan x_2 niet verder verhoogd worden dan het minimum van $\frac{70}{\left(\frac{1}{2}\right)}$, $\frac{90}{\left(\frac{3}{2}\right)}$ en $\frac{20}{\left(\frac{1}{2}\right)}$, dus 40. Dat wil ook zeggen dat x_5 de basis dient te verlaten ten gunste van x_2.
Pivoten betekent nu de volgende bewerkingen uitvoeren:
1 Vermenigvuldig de x_5-rij met 2.
2 Vermenigvuldig de x_5-rij met 5 en tel deze op bij de z-rij.
3 Vermenigvuldig de x_5-rij met $-\frac{1}{2}$ en tel deze op bij de x_1-rij.
4 Vermenigvuldig de x_5-rij met $-1\frac{1}{2}$ en tel deze op bij de x_4-rij.

Hierna ontstaat het derde Simplex-tableau, zie tabel 3.

Tabel 3 Derde Simplex-tableau

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	10	0	10	2300
x_1	0	1	0	1	0	−1	50
x_4	0	0	0	1	1	−3	30
x_2	0	0	1	−1	0	2	40

In de z-rij zien we dat introductie van één van de niet-basisvariabelen, x_3 of x_5, in de basis niet meer leidt tot een verdere verhoging van de z-waarde, immers de getallen zijn niet meer negatief. Dat wil zeggen dat de oplossing die we nu hebben verkregen de optimale oplossing is. Deze optimale oplossing is dus: $x_1 = 50$ en $x_2 = 40$, met als z-waarde: $z = 2300$. Verder geldt nog: $x_3 = x_5 = 0$ en $x_4 = 30$.
Voor problemen in de standaardvorm, met positieve rechterleden, kan de Simplex-methode als volgt worden samengevat:

Stap 1
Maak van alle 'kleiner/gelijk-restricties' gelijkheden door zogenoemde spelingsvariabelen toe te voegen. Stel daarna het eerste Simplex-tableau op.

Stap 2
Als alle elementen in de z-rij niet-negatief zijn, dan is de basisoplossing die bij dit tableau hoort de optimale oplossing. Als één of meer elementen in de z-rij negatief zijn, ga dan naar stap 3.

Stap 3 Selectie van de variabele die in de basis gaat
Kies die variabele waarvan de coëfficiënt in de z-rij het meest negatief is.

Stap 4 Selectie van de variabele die uit de basis gaat
Deel de elementen in het rechterlid door de overeenkomstige positieve elementen uit de kolom van de variabele die in de basis gaat. Kies de kleinste breuk. De noemer van deze kleinste breuk is het pivot-element. De basisvariabele in de rij waarin het pivot-element voorkomt, is de variabele die de basis verlaat.

Stap 5 Pivoten om het pivot-element
Dat wil zeggen de kolom van de variabele die in de basis gaat, schoonvegen met de rij van de variabele die uit de basis gaat. Ga terug naar stap 2.

Een basisoplossing met alle variabelen positief heet *niet-gedegenereerd*. Een basisoplossing met één of meer variabelen gelijk aan nul heet *gedegenereerd*. In beide gevallen, eventueel door het aanbrengen van kleine wijzigingen, leidt de Simplex-methode in een eindig aantal stappen tot de optimale oplossing. Het optimale Simplex-tableau kan als volgt worden geïnterpreteerd:

a De bij de basisvariabelen behorende optimale oplossing staat in de meest rechtse kolom.
b In de z-rij zijn de coëfficiënten van de spelingsvariabelen tevens de schaduwprijzen van de betreffende restricties.
c In de kolommen van de niet-basisvariabelen staat het aantal eenheden dat men moet opofferen (van de basisvariabelen) om één eenheid van de betreffende niet-basisvariabele in de oplossing te kunnen introduceren.
d De coëfficiënten van de spelingsvariabelen in de z-rij zijn tevens de optimale waarden van het overeenkomstige duale probleem.

We illustreren het voorgaande aan de hand van het volgende LP-model, waarin de winst van vier producten moet worden gemaximaliseerd onder drie beperkende voorwaarden.

Maximaliseer $z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

m.b.t.
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15\\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120\\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Het overeenkomstige duale probleem is:

Minimaliseer $z = 15y_1 + 120y_2 + 100y_3$

m.b.t.
$$
\begin{aligned}
y_1 + 7y_2 + 3y_3 &\geq 4\\
y_1 + 5y_2 + 5y_3 &\geq 5\\
y_1 + 3y_2 + 10y_3 &\geq 9\\
y_1 + 2y_2 + 15y_3 &\geq 11\\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Het bij het primale probleem behorende laatste en dus optimale Simplex-tableau is weergegeven in tabel 4.

Tabel 4 Optimaal Simplex-tableau

Basis	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RL
z	1	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{695}{7}$
x_1	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{50}{7}$
x_3	0	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{55}{7}$
x_6	0	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{325}{7}$

a De optimale oplossing is dus: $x_1 = \frac{50}{7}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{55}{7}$ en $x_4 = 0$, met $z = \frac{695}{7}$. Verder is: $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{325}{7}$ en $x_7 = 0$. In de optimale situatie worden dus de producten x_2 en x_4 niet gemaakt.

b De schaduwprijzen zijn: $\frac{13}{7}$ van de eerste restrictie (coëfficiënt van x_5 in de z-rij); 0 van de tweede restrictie (coëfficiënt van x_6 in de z-rij); $\frac{5}{7}$ van de derde restrictie (coëfficiënt van x_7 in de z-rij).

c Als we toch één eenheid x_2 willen maken, dan kost ons dat $\frac{3}{7}$. We offeren dan op: $\frac{5}{7}$ eenheid x_1, $\frac{2}{7}$ eenheid x_3 en $-\frac{6}{7}$ eenheid x_6, zie de x_2-kolom. Als we toch één eenheid x_7 willen 'maken', dat wil dus zeggen dat de beschikbaarheid in de derde restrictie geen 100 is, maar 99, dan kost dat $\frac{5}{7}$. We offeren dan op: $-\frac{1}{7}$ eenheid x_1, $\frac{1}{7}$ eenheid x_3 en $\frac{4}{7}$ eenheid x_6.

d De coëfficiënten van de spelingsvariabelen in de z-rij bepalen de optimale oplossing van het duale probleem, dus: $y_1 = \frac{13}{7}$, $y_2 = 0$ en $y_3 = \frac{5}{7}$.

Deze oplossing voldoet inderdaad aan de beperkingen van het duale probleem:

$$1 \times \frac{13}{7} + 7 \times 0 + 3 \times \frac{5}{7} = \frac{28}{7} \geq 4$$

$$1 \times \frac{13}{7} + 5 \times 0 + 5 \times \frac{5}{7} = \frac{38}{7} \geq 5$$

$$1 \times \frac{13}{7} + 3 \times 0 + 10 \times \frac{5}{7} = \frac{63}{7} \geq 9$$

$$1 \times \frac{13}{7} + 2 \times 0 + 15 \times \frac{5}{7} = \frac{88}{7} \geq 11$$

De waarde van de duale doelfunctie is dezelfde als van de primale doelfunctie:

$$15 \times \frac{13}{7} + 120 \times 0 + 100 \times \frac{5}{7} = \frac{695}{7}$$

Deel 2 Tweefasen-methode

In deel 1 is het Simplex-algoritme alleen toegepast op LP-problemen die kleiner/gelijk-restricties bevatten en waarvan de doelfunctie moest worden gemaximaliseerd. De LP-problemen die groter/gelijk-restricties bevatten of gelijkheidsrestricties, of die moeten worden geminimaliseerd, kunnen niet zonder meer worden opgelost met het standaard Simplex-algoritme. We latenaan de hand van een drietal LP-problemen zien hoe, via de zogenoemde tweefasenmethode, het Simplex-algoritme als oplossingsmethode kan worden gebruikt.
Eerst gaan we het op te lossen LP-probleem transformeren in een gelijkwaardig LP-probleem, als volgt:

1. Restricties met negatief rechterlid vermenigvuldigen we met -1; het teken keren we om.
2. De groter/gelijk-restricties zetten we om in gelijkheidsrestricties door zogenoemde surplus-variabelen, $s_j \geq 0$, af te trekken van het linkerlid.
3. Voor vrije variabelen x_j substitueren we $x_j = x_j^+ - x_j^-$, met x_j^+ en $x_j^- \geq 0$.
4. Als een variabele $x_j \leq 0$ is, dan substitueren we $x_j = -x_j'$, met $x_j' \geq 0$.
5. We voeren weer een variabele z in, waarvoor moet gelden:
   - $z - \Sigma c_j x_j = 0$ als we maximaliseren;
   - $z + \Sigma c_j x_j = 0$ als we moeten minimaliseren.

Het zo ontstane LP-probleem heeft alleen kleiner/gelijk-restricties en gelijkheidsrestricties. Vervolgens voeren we voor de kleiner/gelijk-restricties spelingsvariabelen in, zoals we dat al eerder hebben gedaan. Voor de gelijkheidsrestricties voeren we zogenoemde kunstmatige variabelen, k_j, in (Engels: *artificial variables*), waarvoor eveneens geldt: $k_j \geq 0$. Deze kunstmatige variabelen moeten we weer zien kwijt te raken, en dat lukt via de zogenoemde tweefasenmethode. Ten slotte voeren we nog een z_0-rij in van de vorm:
$z_0 + \Sigma k_j = 0$.
In de eerste fase creëren we een toelaatbare oplossing, waarin alle hulpvariabelen nul zijn. Dit doen we door z_0 $(= -\Sigma k_j)$ te maximaliseren (natuurlijk rekening houdend met de restricties). Deze eerste fase eindigt als de hulpvariabelen uit de basis zijn vertrokken (dan zijn ze immers nul!). Overigens, als dit niet lukt, heeft het oorspronkelijke LP-probleem geen oplossing.
In de tweede fase optimaliseren we de oorspronkelijke doelfunctie, startend met de toelaatbare oplossing van de eerste fase. We verduidelijken de tweefasenmethode door een drietal LP-problemen op te lossen.

Probleem 1
Gegeven het volgende LP-probleem:
Maximaliseer $z = 2x_1 + 3x_2$

$$
\begin{array}{llrl}
\text{m.b.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\
& x_2 & \leq & 3 \\
& x_1 + 2x_2 & \geq & 4 \\
& x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Als we dit probleem volgens de genoemde regels omzetten, krijgen we:

$$
\begin{array}{l}
z_0 + k = 0 \\
z - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\
x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\
x_2 + x_4 = 3 \\
x_1 + 2x_2 - s + k = 4
\end{array}
$$

Na eliminatie van de kunstmatige variabele k uit de z_0-rij, krijgen we:

$$\begin{aligned}
z_0 \; - \; x_1 - 2x_2 + s \quad &= -4\\
z \; - 2x_1 - 3x_2 \quad &= 0\\
x_1 - x_2 + x_3 \quad &= 1\\
x_2 + x_4 \quad &= 3\\
x_1 + 2x_2 - s + k &= 4
\end{aligned}$$

Het eerste tableau (met * = pivot-element en weglating van de z-kolom) wordt dan weergegeven door tabel 5.

Tabel 5 Eerste tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	k	RL
z_0	−1	−2	0	0	1	0	−4
z	−2	−3	0	0	0	0	0
x_3	1	−1	1	0	0	0	1
x_4	0	1	0	1	0	0	3
k	1	2*	0	0	−1	1	4

In de eerste fase gebruiken we de z_0-rij om het pivot-element te bepalen (we maximaliseren dus inderdaad z_0). Elke keer als een kunstmatige variabele uit de basis gaat, mogen we de bijbehorende kolom weglaten. De eerste fase eindigt als alle kunstmatige variabelen uit de basis zijn vertrokken. Zo kan, met behulp van het pivot-element op de kruising van de x_2-kolom en de k-rij, het tweede tableau worden bepaald, zie tabel 6.

Tabel 6 Tweede tableau (1e versie)

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	k	RL
z_0	0	0	0	0	0	1	0
z	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	6
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

De (enige) k-kolom mag nu worden weggelaten, want de kunstmatige variabele k is uit de basis vertrokken. Bovendien zijn er geen andere kunstmatige variabelen meer in de basis aanwezig, dus is tevens de eerste fase beëindigd.
De z_0-rij mag ook worden geschrapt, want $z_0 + k = 0$ betekent immers $k = 0$.
Het tableau aan het begin van de tweede fase, een vereenvoudiging dus van het tweede tableau, wordt dan zoals weergegeven in tabel 7.

Tabel 7 Tweede tableau (tweede versie)

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RL
z	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	6
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	3
x_4	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$*	1
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	2

Als we de regels van het Simplex-algoritme op de gewone manier toepassen, krijgen we het derde tableau, zie tabel 8.

Tabel 8 Derde tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RL
z	−2	0	0	3	0	9
x_3	1*	0	1	1	0	4
s	−1	0	0	2	1	2
x_2	0	1	0	1	0	3

En het vierde tableau, tevens eindtableau, ziet er als volg uit, zie tabel 9.

Tabel 9 Vierde tableau (eindtableau)

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RL
z	0	0	2	5	0	17
x_1	1	0	1	1	0	4
s	0	0	1	3	1	6
x_2	0	1	0	1	0	3

De oplossing is dus: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, met als maximum $z = 17$.

Probleem 2
We beschouwen het volgende LP-probleem:
Minimaliseer $z = 3x_1 + 4x_2$

$$
\begin{array}{llcll}
\text{m.b.t.} & 2x_1 & + & x_2 & \geq 10 \\
 & x_1 & & & \leq 4 \\
 & & & x_2 & \leq 6 \\
 & x_1, x_2 & & & \geq 0
\end{array}
$$

Na herschrijven ontstaat het volgende stelsel vergelijkingen:

$$
\begin{array}{l}
z_0 + k = 0 \\
z_0 \;-\; x_1 \;-\; 2x_2 \;+\; s \;=\; -4 \\
z \;+\; 3x_1 \;+\; 4x_2 \;=\; 0 \\
\quad 2x_1 \;+\; x_2 \;-\; s \;+\; k \;=\; 10 \\
\quad x_1 \;+\; x_3 \;=\; 4 \\
\quad x_2 \;+\; x_4 \;=\; 6
\end{array}
$$

Na eliminatie van k uit de z_0-rij wordt het eerste tableau gegeven in tabel 10.

Tabel 10 Eerste tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	k	RL
z_0	−2	−1	0	0	1	0	−10
z	3	4	0	0	0	0	0
k	2	1	0	0	−1	1	10
x_3	1*	0	1	0	0	0	4
x_4	0	1	0	1	0	0	6

Verder toepassen van het Simplex-algoritme geeft het tweede tableau, zie tabel 11.

Tabel 11 Tweede tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	k	RL
z_0	0	−1	2	0	1	0	−2
z	0	4	−3	0	0	0	12
k	0	1*	−2	0	−1	1	2
x_1	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	1	0	1	0	0	6

Vervolgens komt x_2 in de basis ten koste van k. De kunstmatige variabele k gaat dus uit de basis, zodat de k-kolom mag worden weggelaten. Het derde tableau wordt dan zoals weergegeven in tabel 12.

Tabel 12 Derde tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s	RL
z_0	0	0	0	0	0	0
z	0	0	5	0	4	−20
x_2	0	1	−2	0	−1	2
x_1	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	1	1	4

De eerste fase is hiermee afgelopen, maar de tweede fase ook, want er zijn geen negatieve coëfficiënten in de z-rij. Dit derde tableau is dus tevens het optimale tableau. De oplossing is dus: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, met als minimum $z = 20$.

Probleem 3

Gevraagd wordt het volgende LP-probleem op te lossen:

Minimaliseer $z = 8x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 7x_4$

m.b.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\geq 32 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 &\geq 28 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 &\geq 35 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Herschrijven geeft het volgende stelsel vergelijkingen:

$$z_0 + k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\begin{aligned} z + 8x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 7x_4 \quad &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 - s_1 + k_1 &= 32 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 3x_4 - s_2 + k_2 &= 28 \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 - s_3 + k_3 &= 35 \end{aligned}$$

Na eliminatie van de kunstmatige variabelen k_1, k_2 en k_3 uit de z_0-rij kan het eerste tableau worden opgesteld, zie tabel 13.

Tabel 13 Eerste tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	k_1	k_2	k_3	RL
z_0	−10	−9	−17	−10	1	1	1	0	0	0	−95
z	8	8	16	7	0	0	0	0	0	0	0
k_1	1	3	3	2	−1	0	0	1	0	0	32
k_2	2	2	8*	3	0	−1	0	0	1	0	28
k_3	7	4	6	5	0	0	−1	0	0+	1	35

Verder toepassen van het Simplex-algoritme geeft het tweede tot en met het vijfde tableau, zie de tabellen 14 tot en met 17.

Tabel 14 Tweede tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	k_1	k_3	RL
z_0	$-\frac{23}{4}$	$-\frac{19}{4}$	0	$-\frac{29}{8}$	1	$-\frac{9}{8}$	1	0	0	$-\frac{71}{2}$
z	4	4	0	1	0	2	0	0	0	−56
k_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	$\frac{7}{8}$	−1	$\frac{3}{8}$	0	1	0	$\frac{43}{2}$
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
k_3	$\frac{11}{2}$*	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{11}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	−1	0	1	14

Tabel 15 Derde tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	k_1	RL
z_0	0	$-\frac{47}{22}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{15}{44}$	$-\frac{1}{22}$	0	$-\frac{459}{22}$
z	0	$-\frac{24}{11}$	0	−1	0	$\frac{16}{11}$	$\frac{8}{11}$	0	$-\frac{728}{11}$
k_1	0	$\frac{47}{22}$	0	$\frac{3}{4}$	−1	$\frac{15}{44}$	$\frac{1}{22}$	1	$\frac{459}{22}$
x_3	0	$\frac{3}{22}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{7}{44}$	$\frac{1}{22}$	0	$\frac{63}{22}$
x_1	1	$\frac{5}{11}$*	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{22}$	$-\frac{2}{11}$	0	$\frac{28}{11}$

Tabel 16 Vierde tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	k_1	RL
z_0	$\frac{47}{10}$	0	0	$\frac{8}{5}$	1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	0	$-\frac{89}{10}$
z	$-\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{17}{5}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	0	$-\frac{392}{5}$
k_1	$-\frac{47}{10}$	0	0	$-\frac{8}{5}$	-1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$ *	1	$\frac{89}{10}$
x_3	$-\frac{3}{10}$	0	1	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{21}{10}$
x_2	$\frac{11}{5}$	1	0	$\frac{11}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{28}{5}$

Tabel 17 Vijfde tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RL
z_0	0	0	0	0	0	0	0	0
z	$\frac{32}{9}$	0	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{848}{9}$
s_3	$-\frac{47}{9}$	0	0	$-\frac{16}{9}$	$-\frac{10}{9}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{89}{9}$
x_3	$\frac{2}{9}$	0	1	$\frac{5}{18}$ *	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{9}$
x_2	$\frac{1}{9}$	1	0	$\frac{7}{18}$	$-\frac{4}{9}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{86}{9}$

De eerste fase is hiermee beëindigd. De z_0-rij kan worden weggelaten. Verdere toepassing van het Simplex-algoritme geeft het optimale tableau, zie tabel 18.

Tabel 18 Zesde (optimale) tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	RL
z	4	0	2	0	2	1	0	-92
s_3	$-\frac{19}{5}$	0	$\frac{32}{5}$	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$	1	17
x_4	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{18}{5}$	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	4
x_2	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{7}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	8

De optimale oplossing is dus: $x_1 = 0$, $x_2 = 8$, $x_3 = 0$, $x_4 = 4$, $z = 92$.

Deel 3 Gevoeligheidsanalyse met behulp van de Simplex-methode

Als het aantal beslissingsvariabelen in een LP-probleem groter dan 2 wordt, moet voor de gevoeligheidsanalyse een wiskundiger aanpak worden gekozen. Behalve de Simplex-methode speelt ook de duale vorm van LP-problemen een rol. Deze aanpak wordt besproken aan de hand van het volgende probleem.
Een bedrijf maakt vier producten. De opbrengst per eenheid bedraagt respectievelijk 4, 5, 9 en 11 euro. Het capaciteitsbeslag per eenheid product is weergegeven in tabel 19.

Tabel 19 Capaciteitsbeslag

	A	B	C	D	Beschikbaar maximaal
Personeel	1	1	1	1	15
Grondstof 1 (kg)	7	5	3	2	120
Grondstof 2 (kg)	3	5	10	15	100

Gevraagd wordt een zodanige 'productmix', dat de opbrengst zo groot mogelijk is.
Als beslissingsvariabelen definiëren we: x_i = aantal producten te maken van product i, i = 1,2,3,4.
Het LP-model heeft dan de volgende vorm:
Maximaliseer: $z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$

m.b.t.
$$\begin{array}{rcl l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 15 & \text{[personeelsrestrictie]} \\
7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 120 & \text{[grondstof-1-restrictie]} \\
3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 & \leq & 100 & \text{[grondstof-2-restrictie]} \\
x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0 &
\end{array}$$

Het overeenkomstige duale probleem is, met y_1, y_2 en y_3 als beslissingsvariabelen:
Mimimaliseer: $z = 15y_1 + 120y_2 + 100y_3$
met betrekking tot:

m.b.t.
$$\begin{array}{rcl}
y_1 + 7y_2 + 3y_3 & \geq & 4 \\
y_1 + 5y_2 + 5y_3 & \geq & 5 \\
y_1 + 3y_2 + 10y_3 & \geq & 9 \\
y_1 + 2y_2 + 15y_3 & \geq & 11 \\
y_1, y_2, y_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Het eerste tableau en het optimale eindtableau van het primale probleem worden weergegeven in tabel 20 en 21.

Tabel 20 Eerste tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RL
z	−4	−5	−9	−11	0	0	0	0
x_5	1	1	1	1	1	0	0	15
x_6	7	5	3	2	0	1	0	120
x_7	3	5	10	15	0	0	1	100

Tabel 21 Eindtableau (optimale tableau)

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RL
z	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{695}{7}$
x_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{50}{7}$
x_6	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{325}{7}$
x_3	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{55}{7}$

De optimale oplossing is dus: $x_1 = \frac{50}{7}$, $x_3 = \frac{55}{7}$, $x_2 = x_4 = 0$, met $z = \frac{695}{7}$. De producten 2 en 4 worden dus niet gemaakt. Alle personeelsleden zijn ingeschakeld. Alle grondstof 2 is opgebruikt. Van grondstof 1 is nog $\frac{325}{7}$ kilogram over.

We beginnen de gevoeligheidsanalyse weer met de coëfficiënten van de doelfunctie en maken daarbij onderscheid tussen niet-basisvariabelen en basisvariabelen.

Niet-basisvariabelen x_2 en x_4

Het is intuïtief duidelijk dat als de opbrengst per eenheid van de producten 2 en 4 lager wordt, de huidige oplossing optimaal blijft. Verhogen we de opbrengst per eenheid echter, dan kan de huidige oplossing mogelijk worden verbeterd. De vraag is dan, hoe hoog de opbrengst per eenheid moet worden opdat de huidige oplossing niet meer optimaal is.

Veronderstel dat we de opbrengst per eenheid van x_2 verhogen tot c_2. Wil de huidige oplossing optimaal blijven, dan moeten ook de huidige duale beperkingen blijven gelden. Dus ook de tweede duale beperking moet blijven gelden. In deze beperking hebben we in het rechterlid de huidige waarde van 5 vervangen door c_2: $y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq c_2$.

Substitutie van de optimale duale oplossing geeft dan:

$$\frac{13}{7} + 5 \times 0 + 5 \times \frac{5}{7} \geq c_2 .$$

Hieruit volgt: $c_2 \leq \frac{38}{7}$

We kunnen dus de opbrengst per eenheid voor product 2 met maximaal $\frac{38}{7} - 5 = \frac{3}{7}$ verhogen, zonder dat de huidige oplossing verandert. We noemen het getal van $\frac{3}{7}$ de grenswaarde.

Op dezelfde manier kunnen we ook de grenswaarde berekenen voor de coëfficiënt van x_4. De vierde duale beperking moet blijven gelden, dus: $y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq c_4$. Na substitutie van de optimale duale oplossing, vinden we: $c_4 \leq \frac{88}{7}$. De grenswaarde wordt dan: $\frac{88}{7} - 11 = \frac{11}{7}$. Deze grenswaarden van $\frac{3}{7}$ en $\frac{11}{7}$ vinden we terug in het optimale Simplex-tableau als de coëfficiënten van respectievelijk x_2 en x_4 in de z-rij.

Algemeen geldt:

> *De grenswaarden van de niet-basisvariabelen zijn gelijk aan de coëfficiënten van de niet-basisvariabelen in de z-rij van het optimale tableau.*

Basis-variabelen x_1 en x_3
Het is aannemelijk dat als de opbrengst per eenheid van de producten 1 en 3 maar voldoende lager wordt, de huidige oplossing niet meer optimaal blijft. Minder duidelijk is dat als de opbrengst per eenheid groter wordt, de huidige oplossing ook niet optimaal hoeft te blijven. Binnen welke grenzen kunnen we nu schuiven met de coëfficiënten van x_1 en x_3 zonder dat de optimale oplossing verandert? We beantwoorden deze vraag voor de coëfficiënt van x_1.
Veronderstel: de coëfficiënt van x_1 is $(4 + p_1)$ in plaats van 4, met p_1 niet negatief.
De z-rij van het laatste Simplex-tableau wordt dan:

$$z - p_1x_1 + \frac{3}{7}x_2 + \frac{11}{7}x_4 + \frac{13}{7}x_5 + \frac{5}{7}x_7 = \frac{695}{7}$$

De oplossing kan nu nog worden verbeterd, want er is in de z-rij nog een negatieve coëfficiënt, namelijk die van x_1. We gaan dus verder pivoten. Vermenigvuldig de tweede rij met p_1 en tel deze rij op bij de z-rij. Deze z-rij wordt dan:

$$z + \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{7}p_1\right)x_2 + \left(\frac{11}{7} - \frac{5}{7}p_1\right)x_4 + \left(\frac{13}{7} + \frac{10}{7}p_1\right)x_5 + \left(\frac{5}{7} - \frac{1}{7}p_1\right)x_7 = \frac{695}{7} + \frac{50}{7}p_1$$

De oplossing is optimaal als alle coëfficiënten niet-negatief zijn. Voor p_1 betekent dit: $-\frac{3}{5} \le p_1 \le \frac{11}{5}$.

De huidige oplossing blijft dus optimaal voor voorgaande waarden van p_1. De opbrengst per eenheid van product 1 kan dus variëren van €3,40 tot €6,20 zonder dat de oplossing verandert.

We kunnen ook een gevoeligheidsanalyse plegen op de rechterleden van de restricties. Het wijzigen van de rechterleden van de restricties komt neer op het meer of minder ter beschikking hebben van personeel en/of grondstoffen.
We merken eerst op dat als we een rechterlid wijzigen en de basis blijft een toelaatbare oplossing, deze oplossing ook optimaal is, omdat de coëfficiënten in de z-rij onveranderd zijn gebleven.
Veronderstel dat we in de grondstof-1-restrictie in het eerste Simplex-tableau het rechterlid veranderen in 120 + G1. Voor deze rij hebben we x_6 als spelingsvariabele ingevoerd. Uit het laatste Simplex-tableau blijkt echter dat x_6 in de basis zit, dus verandert de waarde van x_6 ook met G1 en wordt dus $\frac{325}{7} + G1$. De huidige oplossing blijft toelaatbaar zolang $\frac{325}{7} + G1 \ge 0$ is, zodat moet gelden: $G1 \ge -\frac{325}{7}$.
Veronderstel nu dat we in de personeelsrestrictie het rechterlid in het eerste tableau vervangen door 15 + P. Welke waarden kan P nu aannemen, zodanig dat de oplossing toch toelaatbaar blijft? Om deze vraag te beantwoorden merken we op dat gedurende de Simplex-iteraties de manipulaties met dit rechterlid dezelfde zijn als met de coëfficiënt van x_5 in het rechterlid. Het laatste Simplex-tableau komt er dan dus uit te zien zoals weergegeven in tabel 22.

Tabel 22 Laatste tableau

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RL
z	0	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{11}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{695 + 13P}{7}$
x_1	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{5}{7}$	$\frac{10}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{50 + 10P}{7}$
x_6	0	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{13}{7}$	$-\frac{61}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{325 - 61P}{7}$
x_3	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{12}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{55 - 3P}{7}$

Voor een toelaatbare oplossing moet gelden dat de rechterleden allemaal niet-negatief zijn. Voor de waarde van P vinden we dan: $-5 \leq P \leq \frac{325}{61}$.
Als we dus met ons personeelsbestand tussen 10 en 20 blijven, dan produceren we in de optimale situatie toch alleen nog maar de producten 1 en 3.
Merk op dat als P = 1, de waarde van de doelfunctie met $\frac{13}{7}$ stijgt. We hebben deze waarde leren kennen als de schaduwprijs van de betreffende restrictie, hier in dit voorbeeld dus de schaduwprijs van de personeelsrestrictie.

Ook de coëfficiënten van de restricties kunnen natuurlijk worden gevarieerd. Deze coëfficiënten zeggen iets over de efficiency waarmee wordt geproduceerd. Gevoeligheidsanalyse op deze coëfficiënten is niet moeilijk, zolang het maar niet-basisvariabelen betreft, in dit voorbeeld dus de variabelen x_2 en x_4.
Veronderstel dat we de coëfficiënt van x_4 in de grondstof-2-restrictie veranderen van 15 in 15 + A, met A opnieuw niet-negatief. Dit betekent dus eigenlijk dat we veronderstellen meer grondstof 2 nodig te hebben per eenheid x_4 die we produceren. Wil de huidige oplossing optimaal blijven, dan moet ook de bijbehorende duale beperking geldig blijven, dus moet gelden:
$y_1 + 2y_2 + (15 + A)y_3 \geq 11$. Na substitutie van de optimale duale oplossing in voorgaande relatie vinden we dan: $A \geq -\frac{11}{5}$.