Numerieke Algoritmen 2de Kandidatuur Industrieel Ingenieur (Hogeschool Gent)

©Elie De Brauwer

19 juni 2003

Inhoudsopgave

1 About **4**

2 Het bepalen van de wortels van een vergelijking **5**
2.1 Oplossen van vergelijkingen met reële oplossingen 5
2.1.1 Bepaal de oplossingen van $e^x = 2x + 3$. 5
2.2 Veeltermvergelijkingen 9
2.2.1 Deel $3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x + 7$ door $x^2 - 2x + 3$ 9
2.2.2 Deel $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ door $2x^2 + 3$ 9
2.2.3 Ontbind $x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 7x - 3 = 0$ in 2 kwadratische factoren 9
2.3 Oefeningen 11

3 Interpolatie **30**
3.1 Veeltermen van Lagrange 30
3.2 Veeltermen van Newton en Gauss 31
3.2.1 Differentietabel 31
3.2.2 Voorbeeld differentietabel 31
3.2.3 Overzicht formules 33
3.2.4 Newton Voorwaarts 33
3.2.5 Newton Achterwaarts 34
3.2.6 Gauss Voorwaarts 36
3.2.7 Gauss Achterwaarts 38
3.2.8 Oefening op interpolerende veeltermen 40
3.3 Oefeningen 42

4 Numerieke afleiding en integratie **43**
4.1 Bepalen van extremum dmv numerieke afleiding 43
4.2 Numerieke integratie 44
4.2.1 De methode van Newton Cotes 44
4.2.2 Toepassing op Newton-Cotes 46
4.3 Romberg 47
4.4 Integratiemethode van Gauss-Legendre 47
4.5 Oefeningen 48

5 Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen **49**
5.1 De methode van Taylor 49
5.1.1 Voorbeeld 49
5.2 De methode van Euler en van Heun 50
5.2.1 De methode van Euler 50
5.2.2 De methode van van Heun 50
5.2.3 Voorbeeld 50
5.3 De methode van Runga-Kutta 51
5.3.1 Voorbeeld 51

5.4 Oefeningen 51

6 Matrices **52**
6.1 Iteratieve methode voor het oplossen van lineaire stelsels 52
6.1.1 Methode 52
6.1.2 Voldoende voorwaarde voor convergentie 53
6.2 Matrix-inversie 53
6.2.1 Methode 53
6.2.2 Oplossing gebaseerd op Gaussreductie 53
6.3 Eigenwaarden en eigenvectoren 54
6.3.1 Definities 54
6.3.2 Voorbeeld 1 55
6.3.3 Voorbeeld 2 57
6.3.4 Voorbeeld bij een niet symmetrische matrix 58
6.4 Oefeningen 59

7 Lineaire programmatie **61**
7.1 Elementaire begrippen 61
7.1.1 Voorbeeld 61
7.2 De simplex methode voor maximumproblemen 62
7.2.1 De simplex methode in 4 stappen 62
7.2.2 De simplexmethode toegepast op 7.1.1. 63
7.3 De simplexmethode voor minimumproblemen 64
7.4 Het dualiteitsprincipe 65
7.5 Oefeningen 66

1 About

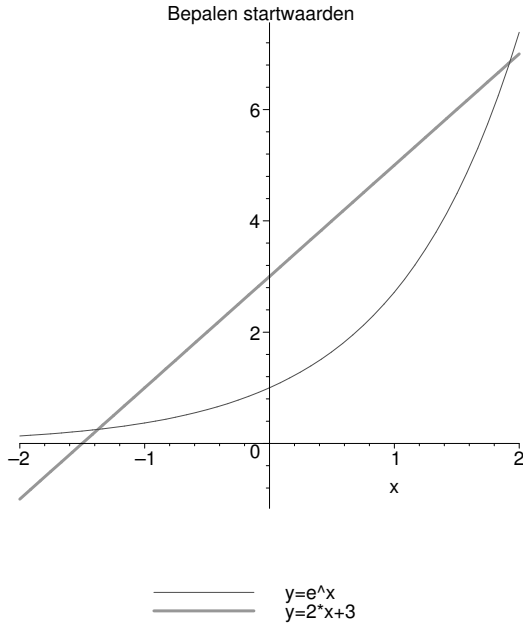
Dit document bevat mijn nota's en mijn uitgewerkte oefeningen voor het vak "Numerieke Algoritmen", gedoceerd in de tweede kandidatuur industrieel ingenieur optie informatica.
De auteur is niet verantwoordelijk voor enige onvolmaaktheden/tekortkomingen in dit document. Gemaakt met emacs in LaTeX onder Debian Linux. Bronnen beschikbaar op aanvraag, voor meer informatie:
elie@de-brauwer.be.

2 Het bepalen van de wortels van een vergelijking

2.1 Oplossen van vergelijkingen met reële oplossingen

2.1.1 Bepaal de oplossingen van $e^x = 2x + 3$.

- Eerst bepalen we de startintervallen, dit kunnen we doen door de functie te splitsen in twee eenvoudigere functies ($y = e^x$ en $y = 2x + 3$), we vinden dan de mogelijke oplossingen door de snijpunten tussen deze twee te bepalen. In dit geval zijn er dus twee snijpunten. Een rond $x = -1.5$ en een rond $x = 2$. Als eerst startinterval nemen we -1.2 en -1.6, als tweede startinterval nemen we 1.8 en 2.2. Enkel voor de eerste methode werken we beide punten uit, voor de daaropvolgende punten doen we dit niet meer omdat het toch analoog verloopt.



Figuur 1: Plot van $y = e^x$ en $y = 2x + 3$

- Oplossing met de halveringsmethode
  - Eerste punt
    Principe: eerst kiezen we twee grenzen waartussen het nulpunt zich bevindt, we bepalen de functiewaarde van het midden van dit interval, indien het nulpunt langs de linkerkant ligt van dit midden dan vervangen we de rechtergrens door het middelpunt, indien het nulpunt langs de rechterkant van dit midden ligt dan vervangen we de linkergrens door dit intervalmidden. Dit blijven we herhalen tot we het nulpunt voldoende nauwkeurig kennen, elke stap verkleint het interval met de

helft.

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i)$
-1.6	-1.2	-1.4	0.046596964
-1.4	-1.2	-1.3	-0.127468207
-1.4	-1.3	-1.35	-0.040759739
-1.4	-1.35	-1.375	0.002839596
-1.375	-1.35	-1.3625	-0.018980074
-1.375	-1.3625	-1.36875	-0.008075208
-1.375	-1.36875	-1.371875	-0.002619045
-1.375	-1.371875	-1.3734375	0.000109966
-1.3734375	-1.371875	-1.37265625	-0.001254616
-1.3734375	-1.37265625	-1.373046875	-0.000572344

Het nulpunt zal gelegen zijn in $]-1.3734375, -1.373046875[$.

– Tweede punt

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i)$
1.8	2.2	2.0	0.389056099
1.8	2.0	1.9	-0.114105558
1.9	2.0	1.95	0.128687581
1.9	1.95	1.925	0.005148666
1.9	1.925	1.9125	-0.055007358
1.9125	1.925	1.91875	-0.025062402
1.91875	1.925	1.921875	-0.009990236
1.921875	1.925	1.9234375	-0.002429140
1.9234375	1.925	1.92421875	0.001357672

Het nulpunt zal gelegen zijn in $]1.9234375, 1.92421875[$.

- Oplossing met de koordmethode
  We beginnen met twee grenswaarden a en b waarbij $f(a) \cdot f(b) < 0$, hier is $f(1.8) \cdot f(2.2) = -0.55 \cdot 1.6 < 0$, ook moet $a < b$. Vervolgens bepaal je voor welke x de rechte door a en b de X-as snijdt of $x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$, het gebruik van de eerste formule voor x_1 geniet de voorkeur. Als a en b gebruikt men x_{i-1} en x_{i-2}.

α	β	$x_i = \alpha - \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(a)$	$f(x_i)$
1.8	2.2	1.901197229	-0.108490675
1.901197229	2.2	1.919897683	-0.019534761
1.901197229	1.919897683	1.924004312	0.000317850
1.919897683	1.924004312	1.923938563	-0.000000908

- Oplossing met de regula-falsi
  Bij de regula-falsi gaat men op dezelfde manier te werk als bij de koordmethode, enkel vervangt men hier slechts a OF b en niet beide, een van de twee blijft de initiële beginwaarden.

α	β	$x_i = \alpha - \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(a)$	$f(x_i)$
1.8	2.2	1.901197229	-0.108490675
1.901197229	2.2	1.919897683	-0.019534761
1.919897683	2.2	1.923224877	-0.003459026
1.923224877	2.2	1.923812773	-0.000610668
1.923812773	2.2	1.923916523	-0.000107754
1.923916523	2.2	1.923934829	-0.000019010
1.923934829	2.2	1.923938058	-0.000003356

- Oplossing met de methode van Newton-Raphson
  Deze methode mag men enkel toepassen indien de eerste afgeleide van de functie verschillend is van nul, dit zou betekenenen dat de raaklijn evenwijdig zou lopen met de X-as wat niet in een snijpunt zou resulteren. $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

x_i	$f(x_i)$
1.9	0.001998439
1.924350860	0.000000580
1.923938870	-0.000000002

  Hier[1] komt de kwadratische convergentie goed tot uiting.

- Oplossing met de methode van opeenvolgende subsituties

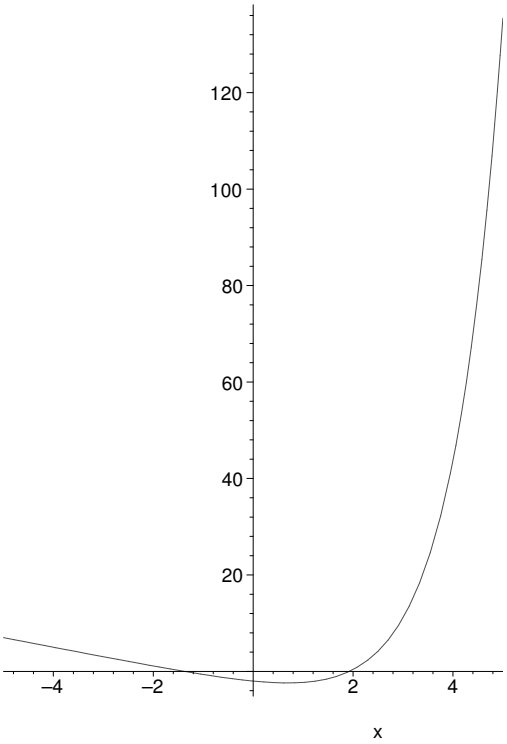
$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ e^x - 2x - 3 &= 0 \\ \varphi(x) &= x \\ \frac{e^x - 3}{2} &= x \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{2}e^x \end{aligned}$$

  Hieruit volgt dat we de methode van opeenvolgende subsituties in dit geval niet kunnen toepassen omdat $|\varphi'(1.9)| > 1$, we hebben echter een tweede snijpunt dat zich situeert in de omgeving van -1.4 en hiervoor is $|\varphi'(-1.4)| = 0.123 < 1$.
  Elke term x_{n+1} is gegeven door $\varphi(x_n)$. Waarbij de eerste term x_0 een eerste benadering is waarbij wel moet gelden dat $|\varphi'(x_0)|$ strikt kleiner is dan een.

[1] Indien hier met 1.8 gestart zou worden duurt de iteratie 1 stap langer

x_i	$\varphi(x_{i-1})$	$f(x_i)$
x_0	-1.4	0.046596964
x_1	-1.376701518	0.005812786
x_2	-1.373795125	0.000734670
x_3	-1.373427790	0.000093005
x_4	-1.373381287	0.000011776
x_5	-1.373375399	0.000001491
x_6	-1.373374653	0.000000188
x_7	-1.373374559	0.000000024

Hieronder toont figuur 2 een plot van de vergelijking $e^x = 2x + 3$, welke we op verscheidene manieren hebben opgelost, deze plot toont aan dat de waarden die we bekomen zijn in de goede richting wijzigen.



Figuur 2: Plot van $e^x = 2x + 3$

2.2 Veeltermvergelijkingen

2.2.1 Deel $3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x + 7$ door $x^2 - 2x + 3$

Met behulp van het *Algoritme van Horner*.

	3	-6	5	0	-4	7
2	$\Downarrow$	6	0	-8	-16	$\Downarrow$
-3	$\Downarrow$	$\Downarrow$	-9	0	12	24
	3	0	-4	-8	-8	31

Dus $3x^5 - 6x^4 + 5x^3 - 4x + 7$ is $(x^2 - 2x + 3) \cdot (3x^3 - 4x - 8) - 8x + 31$

2.2.2 Deel $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x - 6$ door $2x^2 + 3$

Eveneens met behulp van het *Algoritme van Horner*, maar we herleiden de coëfficiënt van x^2 tot 1.

	3	5	-4	5	-6
0	$\Downarrow$	0	0	0	$\Downarrow$
$\frac{-3}{2}$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\frac{-9}{2}$	$\frac{-15}{2}$	$\frac{51}{4}$
	3	5	$\frac{-17}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\frac{27}{4}$

Dus $3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + +5x - 6$ is $(3x^2 + 5x - \frac{17}{2})(2x^2 + 3) + \frac{-5}{2}x + \frac{27}{4}$

2.2.3 Ontbind $x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 7x - 3 = 0$ in 2 kwadratische factoren

Dit doen we met behulp van de *Methode van Bairstow*. Hierbij streven we ernaar om de laatste twee termen na deling door middel van het *Algoritme van Horner* nul te laten worden. [2] Hiervoor hebben we echter startwaarden nodig, indien we niet beter weten delen we eerst gewoon door de veelterm x^2.

	1	5	-8	7	-3
0	$\Downarrow$	0	0	0	$\Downarrow$
0	$\Downarrow$	$\Downarrow$	0	0	0
	1	5	-8	7	-3

De veelterm kan dus geschreven worden als $x^2(x^2 + 5x - 8) + 7x - 3$. Hierin is:

$$\begin{cases} p &= 7 \\ q &= -3 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} r &= 0 \\ s &= 0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} t &= 5 \\ u &= -8 \end{cases}$$

Deze waarden stoppen we in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \triangle r &= \frac{pu-qt}{t^2s-u(tr-u)} \\ \triangle s &= \frac{-(tr-u)q+pts}{t^2s-u(tr-u)} \end{cases}$$

[2] Deze laatste twee termen drukken de rest na deling uit

Hieruit volgt dat $\triangle r = -0.640625$ en dat $\triangle s = 0.375$. Zo passen we de r en s waarden aan tot:

$$\begin{cases} r_1 & = 0 + \triangle r & = -0.640625 \\ s_1 & = 0 + \triangle s & = 0.375 \end{cases}$$

We voeren opnieuw de deling uit maar nu met deze aangepaste waarden:

	1	5	-8	7	-3
0.640625	⇓	0.640625	3.61353	-3.05032	⇓
-0.375	⇓	⇓	-0.375	-2.11523	1.78555
	1	5.640625	-4.76147	1.83445	-1.21445
0.640625	⇓	0.640625	⇓	p	q
-0.375	⇓	⇓	-0.375		
	1	6.281250	-5.13647		
		t	u		

$$\begin{cases} \triangle r & = -0.08748646981 \\ \triangle s & = 0.2765560095 \end{cases} \quad \text{dus} \quad \begin{cases} r_2 & = -0.728111 \\ s_2 & = 0.651556 \end{cases}$$

We voeren opnieuw de deling uit maar nu met deze aangepaste waarden:

	1	5	-8	7	-3
0.728111	⇓	0.728111	4.170700	-3.26255980	⇓
-0.651556	⇓	⇓	-0.651556	-3.73218509	2.919528
	1	5.728111	-4.480855	0.00525511	-0.080472
0.728111	⇓	0.728111	⇓	p	q
-0.651556	⇓	⇓	-0.651556		
	1	6.456222	-5.132411		
		t	u		

$$\begin{cases} \triangle r & = 0.016769239 \\ \triangle s & = 0.001934897 \end{cases} \quad \text{dus} \quad \begin{cases} r_3 & = -0.711342 \\ s_3 & = 0.653491 \end{cases}$$

Op dit punt zijn de bekomen r en s waarden goede benaderingen voor de reële waarden, nu zoeken we door nogmaals het *algoritme van Horner* toe te passen de bijhorende coëfficiënten voor de tweede factor.

	1	5	-8	7	-3
0.711342	⇓	0.711342	4.062717	-3.26256075	⇓
-0.653491	⇓	⇓	-0.653491	-3.73231060	3.0000
	1	5.711342	-4.590774	0.005	0

Conclusie:

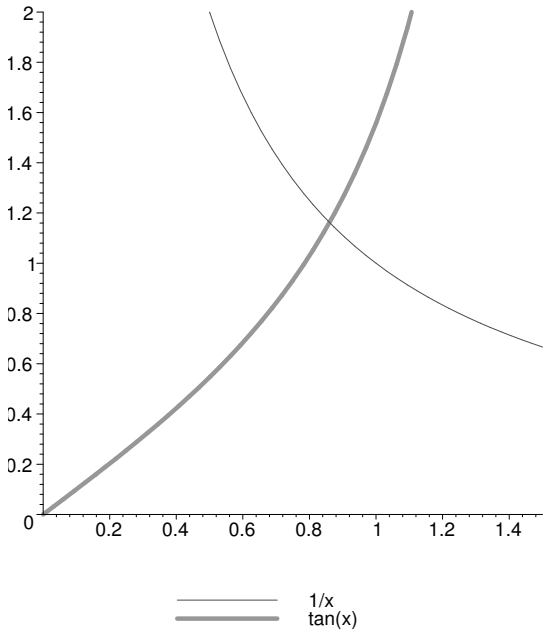
$$\begin{aligned} x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 7x - 3 &= (x^2 - 0.711342x + 0.653491) \\ &\quad \cdot(x^2 + 5.711342x - 4.590774) \end{aligned}$$

2.3 Oefeningen

1. Vergelijk de verschillendemethoden om $f(x) = 4$ op te lossen door dezelfde startwaarden en enkele iteraties uit te voeren:

   (a) $x \cdot tgx = 1$

   - Bepalen van de startwaarden
     Uit figuur 3 volgt dat de gezochte oplossing (één van de mogelijk oplossingen althans) gelegen zal zijn in het interval $[0.84, 0.92]$.



Figuur 3: Plot van $y = \frac{1}{x}$ en $y = tg(x)$

   - De halveringsmethode.

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i)$
0.84	0.92	0.88	0.064504426
0.84	0.88	0.86	-0.001061962
0.86	0.88	0.87	0.031232628
0.86	0.87	0.865	0.014965598
0.86	0.865	0.8625	0.006922178
0.86	0.8625	0.86125	0.002922735
0.86	0.86125	0.860625	0.000928547
0.86	0.860625	0.8603125	-0.000067167
0.8603125	0.860625	0.86046875	0.000430576

     De oplossing van $x \cdot tg(x) = 1$ zal te vinden zijn in het interval $]0.8603125, 0.86046875[$.

   - Regula-Falsi

α	β	$x_i = \alpha - \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(a)$	$f(x_i)$
0.84	0.92	0.8603335799	-0.293·10^{-7}
0.84	0.8603335799	0.8603335891	0.0

De oplossing is gelijk aan 0.8603335891, de oplossing wordt hier zeer snel gevonden omdat de functie een quasi lineair verloop kent in het interval $[8.4, 9.2]$. Zie figuur 4.

- Koordmethode
  Daar de eerste twee stappen bij de koordmethode en bij de regula falsi analoog lopen en rekening houdende met het feit dat de regula falsi dit probleem oploste in 2 twee stappen kunnen we besluiten dat deze stap volledige analoog is met de voorgaande.[3]
- Methode van Newton-Raphson
  Men baseert zich op:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{x_n \cdot tg(x_n)}{tg(x_n) + \frac{x_n}{\cos^2(x_n)}} \end{aligned}$$

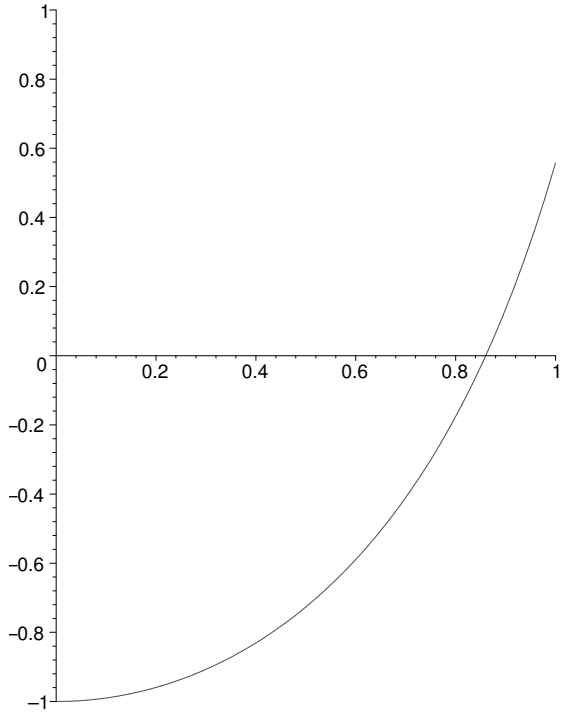
x_i	$f(x_i)$
0.84	0.2·10^{-8}
0.8603335897	0.0
0.8603335891	0.0

  Hieruit volgt dezelfde oplossing als bij de koortmethode en bij de regula falsi.
- Methode van opeenvolgende substituties

$$\begin{aligned} x \cdot tg(x) &= 1 \\ x &= \frac{1}{tg(x)} \\ \varphi(x) &= x = \frac{1}{tg(x)} \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \\ \varphi'(0.84) &= \frac{1}{\cos^2(0.84)} \\ &= 2.24463 \end{aligned}$$

  Nu is $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, nu is $|\varphi'(0.84)| < 1$ waaruit volgt dat deze methode niet toepasbaar is in dit geval.
- Eindplot:
  Zie figuur 4

[3] Zie ook pagina 4 en pagina 5



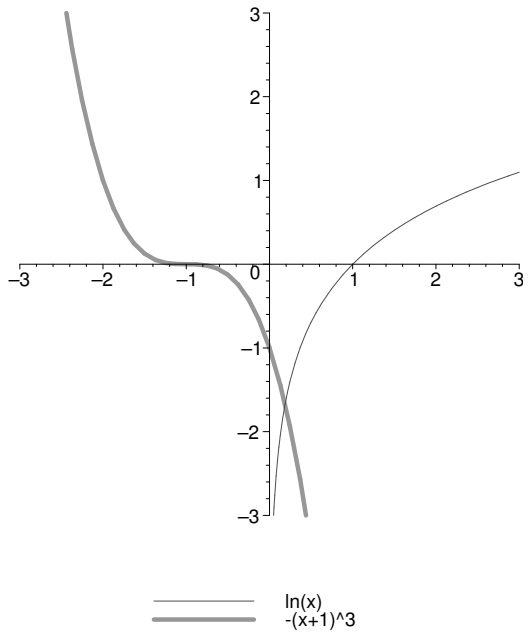
Figuur 4: Plot van $x \cdot tg(x) = 1$

Deze afbeelding bevestigt dat $x = 0.8603335891$ weldegelijk de gezochte oplossing kan zijn.

(b) $e^x - 2x - 3 = 0$
Zie 2.1.1. op pagina 4 en volgende, deze opgave werd als voorbeeld uitgebreider opgelost.

(c) $\ln(x) + (x+1)^3 = 0$

- Bepalen startwaarden
  Uit figuur 5 volgt dat het te zoeken nulpunt gelegen zal zijn in het interval $[0, 0.5]$, maar vermits de functie voor de waarde 0 naar ∞ gaat nemen we voor alle methodes (buiten de Halveringsmethode omdat het daar geen rol speelt) als interval $[0.15, 0.5]$, dit is eveneens te zien in de eindplot (figuur 6).



Figuur 5: Plot van $\ln(x)$ en $-(x+1)^3$

- De Halveringsmethode

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i)$
0.0	0.5	0.25	0.566830639
0.0	0.25	0.125	-0.655613417
0.125	0.25	0.1875	0.000584113
0.125	0.1875	0.15625	-0.310491105
0.15625	0.1875	0.171875	-0.151662402
0.171875	0.1875	0.1796875	-0.074809077
0.1796875	0.1875	0.18359375	-0.036940265
0.18359375	0.1875	0.185546875	-0.018136238
0.185546875	0.1875	0.1865234375	-0.008765750

De oplossing zal gelegen zijn in het interval gegeven door het interval $]0.1865234375, 0.1875[$.

- Regula Falsi

α	β	$x_i = \alpha\text{-}\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(a)$	$f(x_i)$
0.15	0.5	0.1930613254	0.053450521
0.15	0.1930613254	0.1877048573	0.002542880
0.15	0.1877048573	0.1874517369	0.000122510
0.15	0.1874517369	0.1874395461	$0.5905 \cdot 10^{-5}$

De oplossing is ongeveer gelijk aan 0.1874395461.

- Koordmethode

α	β	$x_i = \alpha\text{-}\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}f(a)$	$f(x_i)$
0.15	0.5	0.193061325	0.05345052
0.5	0.193061325	0.187704857	0.00254288
0.193061325	0.187704857	0.1874372972	-0.00001560
0.187704857	0.187437297	0.1874389292	$0.3{\cdot}10^{-8}$

De oplossing is ongeveer gelijk aan 0.1874389292.

- Methode van Newton-Rapshon

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{\ln(x_n) + (x_n+1)^3}{\frac{1}{x_n} + 3(x_n+1)^2} \end{aligned}$$

x_i	$f(x_i)$
0.5	2.681852819
0.1935025350	0.057617992
0.1873997331	-0.000374927
0.1874389287	$0.0{\cdot}10^{-8}$
0.1874389586	0.0

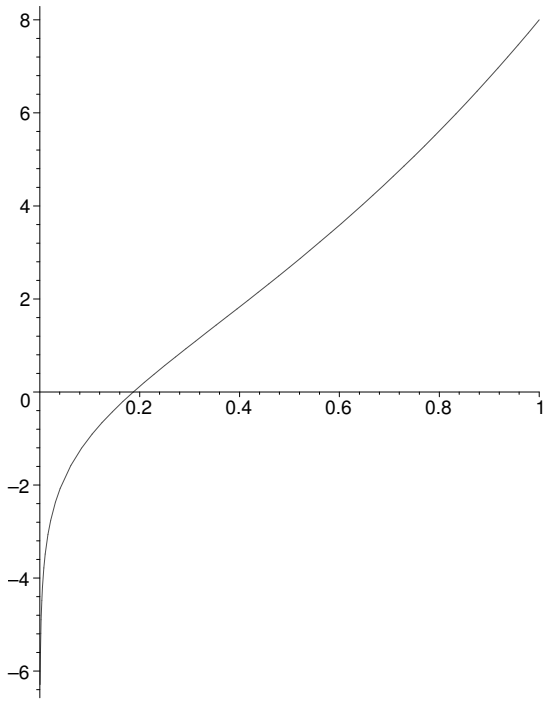
Hieruit volgt dat de oplossing gelijk is aan 0.1874389286.

- Methode van opeenvolgende substituties

$$\begin{aligned} \ln(x) + (x+1)^3 &= 0 \\ \ln(x) + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 0 \\ \varphi(x) &= x = \frac{\ln(x) + x^3 + 3x^2 + 1}{-3} \\ \varphi'(x) &= \frac{\frac{1}{x} + 3x^2 + 6x}{-3} \\ \varphi'(1.6) &= -2.42893 \end{aligned}$$

Vermits $|\varphi'(1.6)| > 1$ volgt hieruit dat de methode van opeenvolgende substituties in dit geval niet toepasbaar zijn daar er geen convergentie zal optreden.

- Eindplot
  Zie figuur 6



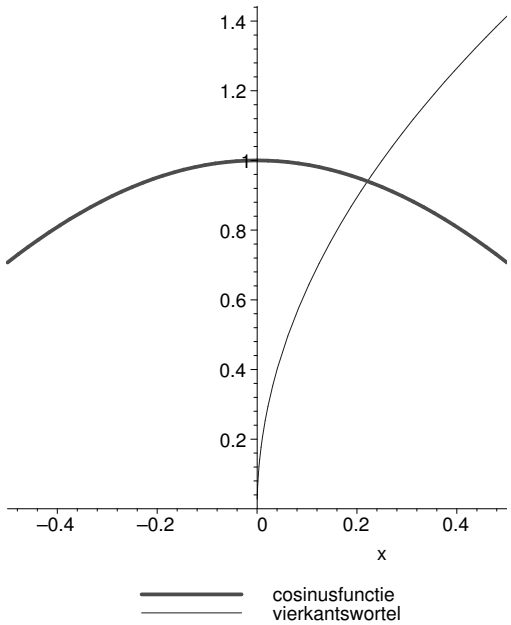
Figuur 6: Plot van $\ln(x) - (x+1)^3 = 0$

(d) $2 \cdot \sqrt{x} = \cos(\frac{\pi x}{2})$

- Bepalen startwaarden
  Uit figuur 7 volgt dat het nulpunt gelegen zal zijn in het interval $[0.15, 0.30]$.
- De Halveringsmethode

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i$
0.15	0.30	0.225	-0.0104919621
0.15	0.225	0.1875	0.0909149319
0.1875	0.225	0.20625	0.0396081859
0.20625	0.225	0.215625	0.0144776382
0.215625	0.225	0.2203125	0.0019652102
0.2203125	0.225	0.22265625	-0.0042700808
0.2203125	0.22265625	0.221484375	-0.0011541363
0.2203125	0.221484375	0.2208984375	0.0004051084

De oplossing zal gelegen zijn in het $]0.2208984375, 0.221484375[$



Figuur 7: Plot van $2\sqrt{x}$ en $\cos(\frac{\pi \cdot x}{2})$

- Regula Falsi

α	β	$x_i = \alpha - \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(\alpha)$	$f(x_i)$
0.15	0.30	0.2237571214	-0.0071941764
0.15	0.2237571214	0.2211683113	-0.0003131616
0.15	0.2211683113	0.2210557989	-0.0000137315
0.15	0.2210557989	0.2210508658	$-0.6022 \cdot 10^{-6}$

Volgens Regula Falsi is het resultaat ongeveer gelijk aan 0.22105

- Koordmethode

α	β	$x_i = \alpha\text{-}\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(\alpha)$	$f(x_i)$
0.15	0.30	0.2237571214	-0.0071941764
0.30	0.223751214	0.2211683113	-0.0003131616
0.223751214	0.2211683113	0.2210504921	$0.3924 \cdot 10^{-6}$

Volgens een bepaling via de koordmethode is de oplossing ongeveer gelijk aan 0.2210504921.

- Methode van Newton-Rapshon

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
x_{n+1} &= x_n - \frac{\cos\left(\frac{\pi \cdot x_n}{2}\right) - 2\sqrt{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x_n}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

x_i	$f(x_i)$
0.15	0.1977732512
0.2170717005	0.0106098417
0.2210504921	0.0000203094
0.2210506395	$0.1 \cdot 10^{-9}$

Volgens de methode van Newton Rapshon is de oplossing gelijk aan 0.2210506395.

- Methode van opeenvolgende substituties

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{x} &= \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \\ \varphi(x) &= x = \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \end{aligned}$$

Hierbij treedt convergentie op wanneer $|\varphi'(c)| < 1$ in de omgeving van a.

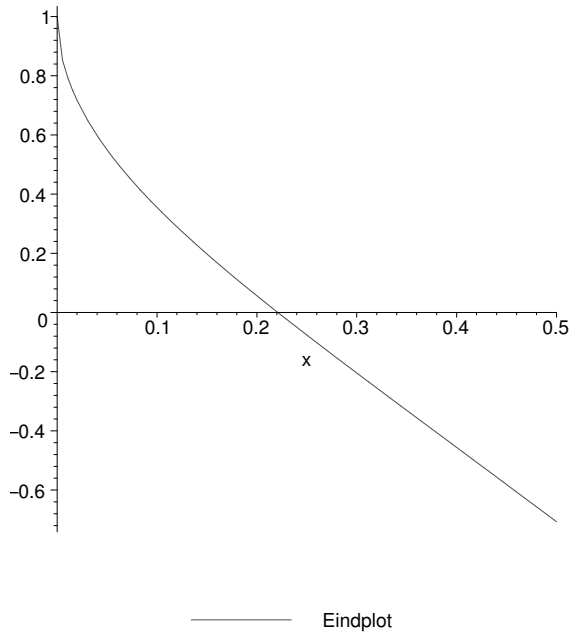
$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \\ \varphi'(2.2) &= 0.047256 \end{aligned}$$

Vermits 0.047256 kleiner is dan 1 kunnen we deze methode in dit geval gebruiken.

x_i	$f(x)$
0.15	0.1977732512
0.2363758155	-0.0405128323
0.2170894082	0.0105625337
0.2220386859	-0.0026284363
0.2208018681	0.0006621725
0.2211131297	-0.0001663104
0.2210349331	0.0000418023
0.2210545866	0.0000105051
0.2210496475	$0.26404 \cdot 10^{-5}$
0.2210508888	$-0.6635 \cdot 10^{-6}$
0.2210505768	$0.1668 \cdot 10^{-6}$
0.2210506552	$-0.419 \cdot 10^{-7}$
0.2210506355	$0.106 \cdot 10^{-7}$
0.2210506405	$-0.25 \cdot 10^{-8}$

Volgens de methode der opeenvolgende subsituties bekomt met een resultaat van ongeveer 0.2210506393.

- Eindplot
  Zie figuur acht, deze figuur bevestigt onze berekingen.



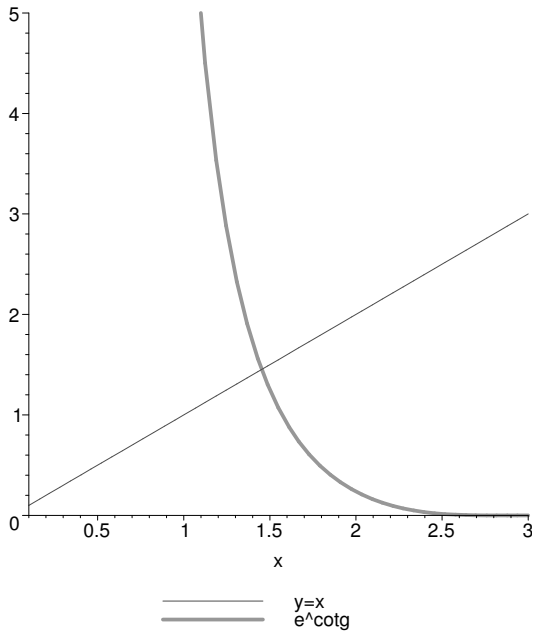
Figuur 8: Plot van $2\sqrt{x} = \cos(\frac{\pi \cdot x}{2})$

(e) $x = e^{xcotg(x)}$

- Bepalen startwaarden
  Uit figuur 9 volgt dat de oplossing zich zal situeren in het interval $[1.2, 1.8]$.
- De Halveringsmethode

α	β	$x_i = \frac{\alpha+\beta}{2}$	$f(x_i$
1.2	1.8	1.5	-0.250447417
1.2	1.5	1.35	0.674147118
1.35	1.5	1.425	0.161143985
1.425	1.5	1.4625	-0.055360009
1.425	1.4625	1.44375	0.049999157
1.44375	1.4625	1.453125	-0.003375010
1.44375	1.453125	1.4484375	0.023134960
1.4484375	1.453125	1.450781250	0.009836136
1.45078125	1.453125	1.451953125	0.003219658
1.451953125	1.453125	1.452539062	-0.000080392
1.451953125	1.452539062	1.452171872	0.001987018
1.452171872	1.452539062	1.452281246	0.001370980
1.452281246	1.452539062	1.452335933	0.001063032
1.452335933	1.452539062	1.452363276	0.000909079

Volgens de halveringsmethode zal het nulpunt gesitueerd zijn in het interval $]1.452363276, 1.452539062[$.



Figuur 9: Plot van $y = x$ en $y = e^{\pi cotg(x)}$

.

- Regula Falsi

α	β	$x_i = \alpha - \frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(\alpha)$	$f(x_i)$
1.2	1.8	1.574532826	-0.5862028104
1.2	1.574532826	1.495502975	-0.228075739
1.2	1.495502975	1.467652546	-0.083359248
1.2	1.467652546	1.457846445	-0.029725940
1.2	1.457846445	1.454396375	-0.010505068
1.2	1.454396375	1.453182945	-0.003700528
1.2	1.453182945	1.452756221	-0.001302070
1.2	1.452756221	1.452606163	-0.000457964
1.2	1.452606163	1.452553396	-0.000161054
1.2	1.452553396	1.452534840	-0.000056633
1.2	1.452534840	1.452528315	-0.000019913
1.2	1.452528315	1.452526021	$-0.7005 \cdot 10^{-5}$
1.2	1.452526021	1.452525214	$-0.2462 \cdot 10^{-5}$
1.2	1.452525214	1.452524930	$-0.864 \cdot 10^{-6}$
1.2	1.452524930	1.452524830	$-0.301 \cdot 10^{-6}$

Uit de Regula falsi volgt dat de oplossing ongeveer gelijk is aan 1.452524830

- Koordmethode

α	β	$x_i = \alpha\text{-}\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}f(\alpha)$	$f(x_i)$
1.2	1.8	1.574532826	-0.5862028104
1.8	1.574532826	1.394294782	0.356949682
1.574532826	1.394294782	1.462508473	-0.055406380
1.394294782	1.462508473	1.453342914	-0.004598914
1.462508473	1.453342914	1.452513280	0.000064700
1.453342914	1.452513280	1.452524790	$-0.76\cdot10^{-7}$
1.452513280	1.452524790	1.452524776	$0.3\cdot10^{-8}$

Volgens de koordmethode is het nulpunt van deze functie ongeveer gelijk aan 0.452524776.

- Methode van Newton-Rapshon

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{e^{\pi cotg(x_n)} - x_n}{e^{\pi cotg(x_n)} \cdot \pi \cdot \frac{-1}{\sin^2(x)} - 1} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{e^{\pi cotg(x_n)} - x_n}{\frac{e^{\pi cotg(x_n)} \cdot \pi}{\sin^2(x_n)} + 1} \end{aligned}$$

Via deze methode slaag ik er niet in het nulpunt te benaderen.

- Methode van opeenvolgende substituties

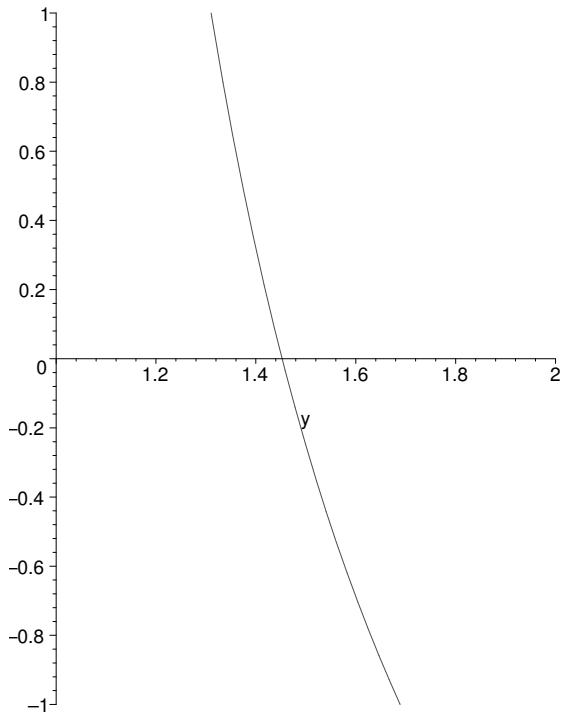
$$\begin{aligned} x &= e^{\pi cotg(x)} \\ f(x) &= e^{\pi cotg(x)} - x \\ \varphi(x) &= e^{\pi cotg(x)} \\ \varphi'(x) &= -\frac{\pi \cdot e^{\pi cotg(x)}}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

De waarden voor $\varphi'(x)$ rond ∞, hieruit volgt dat we ook deze methode niet kunnen toepassen om deze functie te benaderen.

- Eindplot
De figuur 10 bevestigt onze vermoedens.

2. Bepaal het extremum van $f(x) = \frac{tg(x)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{tg(x)}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{\frac{x^2}{\cos^2(x)} - 2x \cdot tg(x)}{x^4} \end{aligned}$$



Figuur 10: Plot van $y = e^{\pi cotg(x)} - x$

.

Uit figuur 11 volgt dat dat het te zoeken nulpunt zich bevindt tussen 0.8 en 1. We gaan het proberen te benaderen via de koordmethode.

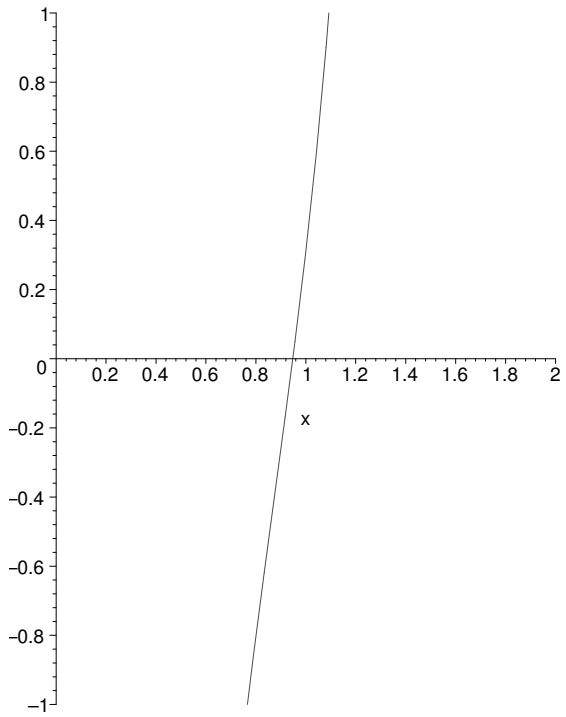
α	β	$x_i = \alpha\text{-}\frac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)} f(\alpha)$	$f(x_i)$
0.8	1.0	0.9442051991	-0.01996243961
1.0	0.9442051991	0.9475735556	-0.0009808046790
0.9442051991	0.9475735556	0.9477476028	$0.2649945380 \cdot 10^{-5}$
0.9475735556	0.9477476028	0.9477471338	$0.2478906104 \cdot 10^{-8}$
0.9477476028	0.9477471338	0.9477471334	$-0.1239453054 \cdot 10^{-8}$
0.9477471338	0.9477471334	0.9477471335	$0.1239453054 \cdot 10^{-8}$

Het extremum is gelegen tussen x=0.9477471334 en x=0.9477471335.

3. Een koorde van 32cm onderspant een cirkelboog van 34 cm. Bereken de pijl.

4. De vergelijking van een ellips is $x^2 + 4y^2 = 4$. De oppervlakte onder de ellips ingesloten door de abscissen $x = a$ en $x = 2$ is 0.5. Bereken a.

5. Een klep heeftde vorm van een halve schijf met een rechthoek. Ze wordt neergelaten over een cilindervormige buis die dezelfde straal als de schijf



Figuur 11: Plot van $y = \frac{\frac{x^2}{\cos^2(x)} - 2x \cdot tg(x)}{x^4}$

.

heeft. Stel de formule op die het verband geeft tussen de neergelaten hoogte en de niet bedekte oppervlakte. Geef aan de oppervlakte een 50-tal waarden tussen 0 (klep is dicht) en 1 (klep is open) en leidt daaruit de hoogte af.

6. Gebruik de methode van Bairstow om de volgende veeltermen te ontbinden:

   (a) $x^4 - 0.55x^3 + 2.60x^2 - 0.69x + 1.70 = 0$
   Deze vergelijking kan geschreven worden als:

$$x^2 \cdot \left(x^2 - 0.55x + 2.6\right) - 0.69x + 1.70$$

   Hier zijn:

$$\begin{cases} p{=}-0.69 \\ q{=}1.70 \\ r{=}0 \\ s{=}0 \\ t{=}-0.55 \\ u{=}2.6 \end{cases}$$

   Hieruit volgt dat:

$$\begin{cases} \Delta r{=}-0.127070101 \\ \Delta s{=}0.653846154 \end{cases}$$

De nieuwe waarden voor r en s worden:

$$\begin{cases} r_1 = -0.127 \\ s_1 = 0.654 \end{cases}$$

	1	−0.55	2.60	−0.69	1.70
0.127	⇓	0.127	−0.054	0.240	⇓
−0.654	⇓	⇓	−0.654	0.277	−1.237
	1	−0.423	1.892	−0.173	0.463
0.127	⇓	0.127	⇓	p	q
−0.654	⇓	⇓	−0.654		
	1	−0.296	1.238		
		t	u		

Hier zijn:

$$\begin{cases} p = -0.173 \\ q = 0.463 \\ r = -0.127 \\ s = 0.654 \\ t = -0.55 \\ u = 2.6 \end{cases}$$

De nieuwe oplossingen bepalen:

$$\begin{cases} \Delta r = -0.029 \\ \Delta s = 0.182 \end{cases} \text{dus} \begin{cases} r_2 = -0.156 \\ s_2 = 0.836 \end{cases}$$

Opnieuw voeren we de deling uit :

	1	−0.55	2.60	−0.69	1.70
0.156	⇓	0.156	−0.061	0.267	⇓
−0.836	⇓	⇓	−0.836	0.329	−1.424
	1	−0.394	1.703	−0.094	0.276
0.156	⇓	0.156	⇓	p	q
−0.836	⇓	⇓	−0.836		
	1	−0.238	0.864		
		t	u		

Hier zijn:

$$\begin{cases} p = -0.094 \\ q = 0.276 \\ r = -0.156 \\ s = 0.836 \\ t = -0.238 \\ u = 0.864 \end{cases}$$

De nieuwe oplossingen bepalen:

$$\begin{cases} \Delta r = -0.020 \\ \Delta s = 0.324 \end{cases} \text{dus} \begin{cases} r_3 = -0.176 \\ s_3 = 1.16 \end{cases}$$

Opnieuw voeren we de deling uit :

	1	−0.55	2.60	−0.69	1.70
0.176	⇓	0.176	−0.066	0.242	⇓
−1.16	⇓	⇓	−1.16	0.434	−1.594
	1	−0.374	1.374	−0.014	0.106
0.176	⇓	0.176	⇓	p	q
−1.16	⇓	⇓	−1.16		
	1	−0.198	0.214		
		t	u		

Hier zijn:

$$\begin{cases} p{=}-0.014 \\ q{=}0.106 \\ r{=}-0.176 \\ s{=}1.16 \\ t{=}-0.198 \\ u{=}0.214 \end{cases}$$

De nieuwe oplossingen bepalen:

$$\begin{cases} \Delta r{=}0.215 \\ \Delta s{=}0.265 \end{cases}$$

Dit gehele proces moddert gewoon wat aan omdat de twee mogelijke kwadratische factoren hun coëfficiënten erg dicht bij elkaar gelegen zijn. We zullen er dus niet in slagen om een noemenwaardige precies te bereiken dus nemen we onze laatste oplossing en gebruiken we deze om de veelterm te splitsen via Horner, dit geeft ons uiteindelijk de ontbinding:

$$\left(x^2 + 0.039x + 1.42\right) \cdot \left(x^2 - 0.589x + 1.2\right) = 0$$

(b) $x^6 - 2x^5 - 18x^4 + 114x^3 + 114x^3 - 311x^2 + 460x - 300 = 0$

7. Los de volgende stelsels op:

(a)

$$\begin{cases} x^2 + y &= 4 \\ y &= \ln(x) + 1 \end{cases}$$

Als startwaarden nemen we (1.6,1.5).

	$(1.6, 1.5)$
$u = x^2 + y - 4$	0.060
$v = \ln(x) + 1 - y$	−0.030
$u'_x = 2x$	3.200
$u'_y = 1$	1.000
$v'_x = \frac{1}{x}$	0.625
$v'_y = -1$	−1.000

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \begin{vmatrix} 3{,}200 & 1{,}000 \\ 0{,}625 & -1{,}000 \end{vmatrix} \\
&= -3.825 \\
h_0 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 0{,}060 & 1{,}000 \\ -0{,}030 & -1{,}000 \end{vmatrix} \\
&= -0.008 \\
k_0 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 3{,}200 & 0{,}060 \\ 0{,}625 & -0{,}030 \end{vmatrix} \\
&= -0.035
\end{aligned}
$$

Hieruit volgen de startwaarden voor de tweede iteratie:

$$
\begin{cases} x{=}1.592 \\ y{=}1.465 \end{cases}
$$

Met deze waarden bepalen we terug de waarden:

	$(1.592, 1.465)$
$u = x^2 + y - 4$	-0.001
$v = \ln(x) + 1 - y$	0.000

Hierna zou men in principe nogmaals kunnen itereren maar met de nauwkeurigheid die ik hier gebruik is dit niet nodig. Dan werkt men verder met deze nieuwe beginwaarden, rekent met opnieuw de determinant uit etc.

(b)

$$
\begin{cases} \sin(x) - y &= 1.32 \\ \cos(y) - x &= -0.85 \end{cases}
$$

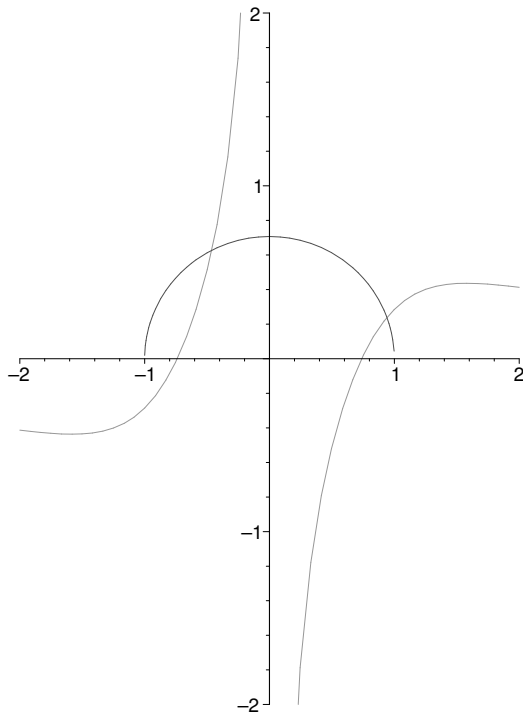
Dit stelsel heeft GEEN oplossing !

(c)

$$
\begin{cases} x^2 + 2y^2 &= 1 \\ tg(xy + 0.5) &= x^2 \end{cases}
$$

Omdat het erg moeilijk is om bij de opgegeven functies uit het vuistje goede startwaarden te kiezen, (en omdat in de cursus staat dat je startwaarden het best bepaalt met Laguerre, maar Laguerre is niet te kennen), is een plot van de twee functies van dit stelsel ingevoegd. Uit de figuur volgt dat we als startwaarden het best : (0.8,0.2) nemen.

	$(0.8, 0.2)$
$u = x^2 + 2y^2 - 1$	-0.280
$v = tg(xy + 0.5) - x^2$	0.136
$u'_x = 2x$	1.600
$u'_y = 4y$	0.800
$v'_x = \frac{y}{\cos(xy+0.5)} - 2x$	-1.347
$v'_y = \frac{x}{\cos(xy+0.5)}$	1.013



Figuur 12: Plot van stelsel 7.3

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \begin{vmatrix} 1{,}600 & 0{,}800 \\ -1{,}347 & 1{,}013 \end{vmatrix} \\
&= 2.698 \\
h_0 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} -0{,}280 & 0{,}800 \\ 0{,}136 & 1{,}013 \end{vmatrix} \\
&= 0.145 \\
k_0 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 1{,}600 & -0{,}280 \\ -1{,}347 & 0{,}136 \end{vmatrix} \\
&= 0.060
\end{aligned}
$$

Hieruit volgen de startwaarden voor de tweede iteratie:

$$
\begin{cases} x{=}0.945 \\ y{=}0.260 \end{cases}
$$

Met deze waarden bepalen we terug de waarden:

	$(0.945, 0.260)$
$u = x^2 + 2y^2 - 1$	0.028
$v = tg(xy + 0.5) - x^2$	0.031
$u'_x = 2x$	1.890
$u'_y = 4y$	1.040
$v'_x = \frac{y}{\cos(xy+0.5)} - 2x$	-1.536
$v'_y = \frac{x}{\cos(xy+0.5)}$	1.286

$$\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} 1{,}890 & 1{,}040 \\ -1{,}536 & 1{,}286 \end{vmatrix} \\
&= 4.028 \\
h_1 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 0{,}028 & 1{,}040 \\ 0{,}031 & 1{,}286 \end{vmatrix} \\
&= -0.001 \\
k_1 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 1{,}890 & 0{,}028 \\ -1{,}536 & 0{,}031 \end{vmatrix} \\
&= -0.025
\end{aligned}$$

Hieruit volgen de startwaarden voor de derde iteratie:

$$\begin{cases} x{=}0.944 \\ y{=}0.235 \end{cases}$$

Met deze waarden bepalen we terug de waarden:

	$(0.944, 0.235)$
$u = x^2 + 2y^2 - 1$	0.002
$v = tg(xy + 0.5) - x^2$	-0.011
$u'_x = 2x$	1.888
$u'_y = 4y$	0.940
$v'_x = \frac{y}{\cos(xy+0.5)} - 2x$	-1.575
$v'_y = \frac{x}{\cos(xy+0.5)}$	1.258

$$\begin{aligned}
D_2 &= \begin{vmatrix} 1{,}888 & 0{,}940 \\ -1{,}575 & 1{,}258 \end{vmatrix} \\
&= 3.856 \\
h_2 &= -\frac{1}{D_0} \begin{vmatrix} 0{,}002 & 0{,}940 \\ -0{,}011 & 1{,}258 \end{vmatrix} \\
&= -0.003
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= -\frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1{,}888 & 0{,}002 \\ -1{,}575 & -0{,}011 \end{vmatrix} \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

Hieruit volgen de startwaarden voor de vierde iteratie:

$$\begin{cases} x{=}0.947 \\ y{=}0.240 \end{cases}$$

Met deze waarden bepalen we terug de waarden:

	$(0.947, 0.240)$
$u = x^2 + 2y^2 - 1$	0.012
$v = tg(xy + 0.5) - x^2$	-0.002

Door gebrek aan precisie tijdens de berekeningen stranden we rond deze waarden. Het nadeel aan deze methode voor het oplossen van stelsels is dat men de oplossing zo goed als moet kennen om te kunnen starten.

(d)

$$\begin{cases} x^4 + y^4 &= 67 \\ x^3 - 3xy^2 + 35 &= 0 \end{cases}$$

Ik beloof geen stelsel meer te zullen oplossen voor de dag van mijn begrafenis.

(e)

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 &= 0 \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 &= 0 \end{cases}$$

3 Interpolatie

3.1 Veeltermen van Lagrange

Gegeven is onderstaande tabel met waarden:

x_i	y_i
1	3.5
2	4.2
3	5.2
4	6.4

Gevraagd is $f(2,3)$.
De interpolerende veelterm van Lagrange is gegeven door:

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) \\ L_j(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \end{aligned}$$

Wanneer we dit toepassen op dit geval bekomen we:

$$\begin{cases} L_0(x)=\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} \\ L_1(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} \\ L_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} \\ L_3(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)} \end{cases}$$

Dit geeft volgende deeloplossingen voor de veeltermen L_j

$$\begin{cases} L_0(x)=-0.595 \\ L_1(x)=\ \ 0.7735 \\ L_2(x)=\ \ 0.3315 \\ L_3(x)=-0.0455 \end{cases}$$

Wanneer we deze tussenuitkomsten in de veelterm van Lagrange stoppen krijgen we:

$$\begin{aligned} V_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) \\ &= 3.5 \cdot -0.0595 + 4.2 \cdot 0.7735 + 5.2 \cdot 0.3315 + 6.2 \cdot -0.0455 \\ &= 4.47305 \end{aligned}$$

3.2 Veeltermen van Newton en Gauss

3.2.1 Differentietabel

We stellen de differentietabel op van de tabel gegeven in vorige sectie.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	3.5	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
	$\models$	0.7	$\cdots$	$\cdots$
2	4.2	$\models$	0.3	$\cdots$
	$\models$	1.0	$\models$	-0.1
3	5.2	$\models$	0.2	$\cdots$
	$\models$	1.2	$\cdots$	$\cdots$
4	6.4	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Men kan Newton enkel gebruiken indien de afstand tussen opeenvolgende x waarden voor elke twee opeenvolgende x waarden gelijk is of $x_m = x_0 + mh$ waar bij $m \in \mathbb{N}$. Hier geldt dus ook:

$$\begin{aligned}
\Delta f_m &= f_{m+1} - f_m \\
\Delta^2 f_m &= \Delta f_{m+1} - \Delta f_m \\
&= f_{m+2} - f_{m+1} - (f_{m+1} - f_m) \\
&= f_{m+2} - 2f_{m+1} + f_m
\end{aligned}$$

Hier merken we de gelijkheid tussen de coëfficiënten en het binomium van Newton op. Dit leidt tot de algemene schrijfwijze[4]:

$$\Delta^k f_0 = f_k - \binom{k}{1} f_{k-1} + \binom{k}{2} f_{k-2} - \ldots + (-1)^k f_0$$

Men verkiest hier de Amerikaanse notatie boven de C notatie omdat men er bij de C notatie van uitgaat dat zowel p en n behoren tot $\mathbb{N}$.

3.2.2 Voorbeeld differentietabel

Zie volgende pagina:

[4] Voor een rij voorwaartse differenties

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$	$\Delta^6 f_i$	$\Delta^7 f_i$	$\Delta^8 f_i$
1.4	3.807					$\cdots$			
$\Vert$	$\models$	0.110				$\cdots$			
1.6	3.917	$\models$	-0.026			$\cdots$			
$\Vert$	$\models$	0.084	$\models$	0.016		$\cdots$			
1.8	4.001	$\models$	-0.010	$\models$	-0.074	$\cdots$			
$\Vert$	$\models$	0.074	$\models$	-0.058	$\models$	0.166	$\cdots$		
2.0	4.075	$\models$	-0.068	$\models$	0.092	$\models$	-0.342	$\cdots$	
$\Vert$	$\models$	0.006	$\models$	0.034	$\models$	-1.76	$\models$	0.684	$\cdots$
2.2	4.081	$\models$	-0.034	$\models$	-0.084	$\models$	0.342	$\models$	-1.454
$\Vert$	$\models$	-0.028	$\models$	-0.050	$\models$	0.166	$\models$	-0.770	$\cdots$
2.4	4.053	$\models$	-0.084	$\models$	0.082	$\models$	-0.428	$\cdots$	
$\Vert$	$\models$	-0.112	$\models$	0.032	$\models$	-0.262	$\cdots$		
2.6	3.941	$\models$	-0.052	$\models$	-0.180	$\cdots$			
$\Vert$	$\models$	-0.164	$\models$	-0.148	$\cdots$				
2.8	3.777	$\models$	-0.200	$\cdots$					
$\Vert$	$\models$	-0.364	$\cdots$						
3.0	3.413				$\cdots$				

Altijd volgende min voorgaande.

Vanaf $\Delta^5 f_i$ zijn de onderlinge verschillen te groot.

$\searrow$ is de zin voor *Newton voorwaarts.*

$\nearrow$ is de zin voor *Newton achterwaarts.*

$\searrow\nearrow\searrow\nearrow$ ... is de zin voor *Gauss voorwaarts.*

$\nearrow\searrow\nearrow\searrow$ ... is de zin voor *Gauss achterwaarts.*

3.2.3 Overzicht formules

- Newton Voorwaarts

$$V_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0$$

- Newton Achterwaarts

$$V_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \binom{s+n-1}{n}\Delta^n f_{-n}$$

- Gauss Voorwaarts

$$V_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-1} + \binom{s+1}{4}\Delta^4 f_{-2} + \ldots$$

- Gauss Achterwaarts

$$V_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-2} + \binom{s+2}{4}\Delta^4 f_{-2} + \ldots$$

3.2.4 Newton Voorwaarts

We stellen de vergelijking op van de veelterm die gaat door de alle opgegeven punten, of door $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \ldots$

- veelterm door (x_0, f_0) en (x_1, f_1)
  Dit is een veelterm van de eerste graad in x, genoteerd door $V_1(x)$ en is gegeven door de rechte met vergelijking:

  $$V_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta f_0$$

  Waarbij h het constand verschil tussen twee opeenvolgende x waarden voorstelt.

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ en (x_2, f_2)
  Deze veelterm van de tweede graad $V_2(x)$ kunnen we schrijven als

  $$V_2(x) = V_1(x) + a_2 \cdot (x - x_0)(x - x_1)$$

  Deze veelterm gaat zeker door de punten (x_0, f_0) en (x_1, f_1) en zal eveneens door (x_2, f_2) gaan als

  $$\begin{aligned} f_2 &= V_1(x_2) + a_2 \cdot (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ f_2 &= V_1(x_2) + a_2 \cdot 2h^2 \\ f_2 &= f_0 + \frac{x_2 - x_0}{h} \cdot \Delta f_0 + a_2 \cdot 2h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 - f_0 - 2\Delta f_0 &= a_2 \cdot 2h^2 \\
f_2 - f_0 - 2(f_1 - f_0) &= a_2 \cdot 2h^2 \\
f_0 - f_1 + f_2 - f_1 &= a_2 \cdot 2h^2 \\
(f_2 - f_1) - (f_1 - f_0) &= a_2 \cdot 2h^2 \\
\Delta f_1 - \Delta f_0 &= a_2 \cdot 2h^2 \\
\Delta^2 f_0 &= a_2 \cdot 2h^2 \\
a_2 &= \frac{\Delta^2 f_0}{2h^2} \\
a_2 &= \frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}
\end{aligned}$$

Wanneer we dit substitueren in de formule voor $V_2(x)$ geeft dit:

$$V_2(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f_0$$

- algemeen

$$\begin{aligned}
V_k(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2}\Delta^2 f_0 + \cdots \\
&\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{k-1})}{k!h^k}\Delta^k f_0
\end{aligned}$$

Deze veelterm laat zich eleganter schrijven wanneer we s invoeren:

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

dan is $x - x_j = (x - x_0) - (x_j - x_0) = hs - hj = (s - j)h$. Dit geef als eindformule:

$$\boxed{V_n(s) = f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^n f_0}$$

3.2.5 Newton Achterwaarts

We stellen de vergelijking op van de veelterm die gaat door de alle opgegeven punten, of door $(x_0, f_0), (x_{-1}, f_{-1}), (x_{-2}, f_{-2}), \ldots$

- veelterm door (x_0, f_0) en (x_{-1}, f_{-1})
  Dit is een veelterm van de eerste graad in x, genoteerd door $V_1(x)$ en is gegeven door de rechte met vergelijking:

  $$V_1(x) = f_0 + \frac{f_{-1} - f_0}{x_{-1} - x_0} \cdot (x - x_0) = f_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta f_{-1}$$

  Waarbij h het constand verschil tussen twee opeenvolgende x waarden voorstelt.

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_{-1}, f_{-1})$ en (x_{-2}, f_{-2})
  Deze veelterm van de tweede graad $V_2(x)$ kunnen we schrijven als

$$V_2(x) = V_1(x) + a_2 \cdot (x - x_0)(x - x_{-1})$$

  Deze veelterm gaat zeker door de punten (x_0, f_0) en (x_{-1}, f_{-1}) en zal eveneens door (x_{-2}, f_{-2}) gaan als

$$\begin{aligned}
f_{-2} &= V_1(x_{-2}) + a_2 \cdot (x_{-2} - x_0)(x_{-2} - x_{-1}) \\
f_{-2} &= V_1(x_{-2}) + a_2 \cdot 2h^2 \\
f_{-2} &= f_0 + \frac{x_{-2} - x_0}{h} \cdot \Delta f_{-1} + a_2 \cdot 2h^2 \\
f_{-2} - f_0 + 2\Delta f_{-1} &= a_2 \cdot 2h^2 \\
f_{-2} - f_0 + 2(f_0 - f_{-1}) &= a_2 \cdot 2h^2 \\
f_0 - 2f_{-1} + f_{-2} &= a_2 \cdot 2h^2 \\
(f_0 - f_{-1}) + (f_{-2} - f_{-1}) &= a_2 \cdot 2h^2 \\
(f_0 - f_{-1}) - (f_{-1} - f_{-2}) &= a_2 \cdot 2h^2 \\
\Delta f_{-1} - \Delta f_{-2} &= a_2 \cdot 2h^2 \\
\Delta^2 f_{-2} &= a_2 \cdot 2h^2 \\
a_2 &= \frac{\Delta^2 f_{-2}}{2h^2} \\
a_2 &= \frac{\Delta^2 f_{-2}}{2!h^2}
\end{aligned}$$

  Wanneer we dit substitueren in de formule voor $V_2(x)$ geeft dit:

$$V_2(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_{-1} + \frac{(x - x_0)(x - x_{-1})}{2!h^2}\Delta^2 f_{-2}$$

- algemeen

$$\begin{aligned}
V_k(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_{-1} + \frac{(x - x_0)(x - x_{-1})}{2!h^2}\Delta^2 f_{-2} + \cdots \\
&\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_{-1}) \cdots (x - x_{-k+1})}{k!h^k}\Delta^k f_{-k}
\end{aligned}$$

  Deze veelterm laat zich eleganter schrijven wanneer we s invoeren:

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

  dan is $x - x_{-k+1} = (x - x_0) - (x_{-k+1} - x_0) = hs - (-k+1)h = (s+k-1)h$.
  Dit geef als eindformule:

$$\boxed{V_n(s) = f_0 + \tbinom{s}{1}\Delta f_{-1} + \tbinom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-2} + \ldots + \tbinom{s+k-1}{k}\Delta^k f_{-k}}$$

3.2.6 Gauss Voorwaarts

- veelterm door (x_0, f_0) en (x_1, f_1)

$$\begin{aligned} V_1(x) &= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\ &= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 \end{aligned}$$

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ en (x_{-1}, f_{-1})

$$V_2(x) = V_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Deze functie bevat de punten (x_0, f_0) en (x_1, f_1), nu bepalen we a_2 zodat deze veelterm ook (x_{-1}, f_{-1}) bevat.

$$\begin{aligned} f_{-1} &= f_0 + \frac{x_{-1} - x_0}{h}\Delta f_0 + a_2(x_{-1} - x_0)(x_{-1} - x_1) \\ f_{-1} &= f_0 - \frac{h}{h}\Delta f_0 + a_2(h)(2h) \\ 2a_2h^2 &= f_{-1} - f_0 + \Delta f_0 \\ 2a_2h^2 &= \Delta f_0 - \Delta f_{-1} \\ 2a_2h^2 &= \Delta^2 f_{-1} \\ a_2 &= \frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!h^2} \end{aligned}$$

Deze waarde substitueren we in de formule voor $V_2(x)$

$$V_2(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f_{-1}$$

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_{-1}, f_{-1})$ en (x_2, f_2)

$$V_3(x) = V_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})$$

Deze functie bevat de punten $(x_0, f_0), (x_1, f_1)$ en (x_{-1}, f_{-1}), nu bepalen we a_3 zodat deze veelterm ook (x_2, f_2) bevat.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f_0 + \frac{x_2 - x_0}{h}(f_1 - f_0) \\
&\quad + \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}{2h^2}(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) \\
&\quad + a_3(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_{-1}) \\
f_2 &= f_0 + \frac{2h}{h}(f_1 - f_0) \\
&\quad + \frac{(2h)(h)}{2h^2}(f_1 - 2f_0 + f_{-1}) \\
&\quad + a_3(2h)(h)(3h) \\
3!h^3 a_3 &= f_2 - f_0 - 2(f_1 - f_0) - (f_1 - 2f_0 + f_{-1}) \\
3!h^3 a_3 &= -f_{-1} + 3f_0 - 3f_1 + f_2 \\
3!h^3 a_3 &= \Delta f_{-1} - 2\Delta f_0 + \Delta f_1 \\
3!h^3 a_3 &= -\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_0 \\
3!h^3 a_3 &= \Delta^3 f_{-1} \\
a_3 &= \frac{\Delta^3 f_{-1}}{3!h^3}
\end{aligned}
$$

Dit substitueren we in de vergelijking voor $V_3(x)$

$$
\begin{aligned}
V_3(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f_{-1} \\
&\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})}{3!h^3}\Delta^3 f_{-1}
\end{aligned}
$$

- algemeen
  Stel $s = \frac{x - x_0}{h}$

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{x - x_0}{h} \\
sh &= x - x_0 \\
x &= x_0 + sh \\
x &= x_1 - h + sh \\
x &= x_1 + (s - 1)h \\
\frac{x - x_1}{h} &= (s - 1) \\
\frac{x - x_j}{h} &= (s - j)
\end{aligned}
$$

Rekening houdende met dit gegeven bekomen we de volgende algemene formule:

$$\begin{aligned}
V_n(s) &= f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2}\Delta^2 f_{-1} \\
&+ \frac{s(s-1)(s+1)}{3!}\Delta^3 f_{-1} \\
&+ \frac{s(s-1)(s+1)(s-2)}{4!}\Delta^4 f_{-2} \\
&+ \frac{s(s-1)(s+1)(s-2)(s+2)}{5!}\Delta^5 f_{-2} + \cdots \\
V_n(s) &= f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-1} \\
&+ \binom{s+1}{4}\Delta^4 f_{-2} + \binom{s+2}{5}\Delta^5 f_{-2} + \binom{s+2}{6}\Delta^6 f_{-3} + \cdots
\end{aligned}$$

3.2.7 Gauss Achterwaarts

- veelterm door (x_0, f_0) en (x_{-1}, f_{-1})

$$\begin{aligned}
V_1(x) &= f_0 + \frac{f_{-1} - f_0}{x_{-1} - x_0}(x - x_0) \\
&= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_{-1}
\end{aligned}$$

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_{-1}, f_{-1})$ en (x_1, f_1)

$$V_2(x) = V_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_{-1})$$

Deze functie bevat de punten (x_0, f_0) en (x_{-1}, f_{-1}), nu bepalen we a_2 zodat deze veelterm ook (x_1, f_1) bevat.

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_0 + \frac{x_{-1} - x_0}{-h}\Delta f_{-1} + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1}) \\
f_1 &= f_0 + \frac{-h}{-h}\Delta f_{-1} + a_2(h)(2h) \\
2a_2h^2 &= f_1 - f_0 - \Delta f_{-1} \\
2a_2h^2 &= \Delta f_0 - \Delta f_{-1} \\
2a_2h^2 &= \Delta^2 f_{-1} \\
a_2 &= \frac{\Delta^2 f_{-1}}{2!h^2}
\end{aligned}$$

Deze waarde substitueren we in de formule voor $V_2(x)$

$$V_2(x) = f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_{-1} + \frac{(x - x_0)(x - x_{-1})}{2h^2}\Delta^2 f_{-1}$$

- veelterm door $(x_0, f_0), (x_{-1}, f_{-1}), (x_1, f_1)$ en (x_{-2}, f_{-2})

$$V_3(x) = V_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_1)$$

Deze functie bevat de punten $(x_0, f_0), (x_{-1}, f_{-1})$ en (x_1, f_1), nu bepalen we a_3 zodat deze veelterm ook (x_{-2}, f_{-2}) bevat.

$$\begin{aligned}
f_{-2} &= f_0 + \frac{x_{-2} - x_0}{h}(f_0 - f_{-1}) \\
&\quad + \frac{(x_{-2} - x_0)(x_{-2} - x_{-1})}{2h^2}\Delta^2 f_{-1} \\
&\quad + a_3(x_{-2} - x_0)(x_{-2} - x_{-1})(x_{-2} - x_1) \\
f_{-2} &= f_0 + \frac{-2h}{h}(f_0 - f_{-1}) \\
&\quad + \frac{(-2h)(-h)}{2h^2}\Delta^2 f_{-1} \\
&\quad + a_3(-2h)(-h)(-3h) \\
a_3 3!h &= f_0 - f_{-2} - 2(f_0 - f_{-1}) + \Delta^2 f_{-1} \\
a_3 3!h &= f_0 - f_{-2} - 2f_0 + 2f_{-1} + \Delta^2 f_{-1} \\
a_3 3!h &= (f_{-1} - f_{-2}) - (f_0 - f_{-1}) + \Delta^2 f_{-1} \\
a_3 3!h &= -(\Delta f_{-1} - \Delta_{-2}) + \Delta^2 f_{-1} \\
a_3 3!h &= \Delta^2 f_{-1} - \Delta^2 f_{-2} \\
a_3 3!h &= \Delta^3 f_{-2}
\end{aligned}$$

Dit substitueren we in de vergelijking voor $V_3(x)$

$$\begin{aligned}
V_3(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h}\Delta f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2}\Delta^2 f_{-1} \\
&\quad + \frac{(x - x_0)(x - x_{-1})(x - x_1)}{3!h^3}\Delta^3 f_{-2}
\end{aligned}$$

- algemeen
  Stel $s = \frac{x - x_0}{h}$

$$\begin{aligned}
s &= \frac{x - x_0}{h} \\
sh &= x - x_0 \\
x &= x_0 + sh
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= x_1 - h_s h \\ x &= x_1 + (s-1)h \\ \frac{x - x_1}{h} &= (s-1) \\ \frac{x - x_j}{h} &= (s-j) \end{aligned}$$

Rekening houdende met dit gegeven bekomen we de volgende algemene formule:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= f_0 + s\Delta f_{-1} + \frac{s(s+1)}{2}\Delta^2 f_{-1} \\ &+ \frac{s(s+1)(s-1)}{3!}\Delta^3 f_{-2} \\ &+ \frac{s(s+1)(s-1)(s+2)}{4!}\Delta^4 f_{-2} \\ &+ \frac{s(s+1)(s-1)(s+2)(s-2)}{5!}\Delta^5 f_{-3} + \cdots \\ V_n(s) &= f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_{-1} + \binom{s+1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \binom{s+1}{3}\Delta^3 f_{-2} \\ &+ \binom{s+2}{4}\Delta^4 f_{-2} + \binom{s+2}{5}\Delta^5 f_{-3} + \binom{s+3}{6}\Delta^6 f_{-3} + \cdots \end{aligned}$$

3.2.8 Oefening op interpolerende veeltermen

Bepaal aan de hand van gegevens uit de tabel uit sectie 3.2.2, we werken uit tot $\Delta^3 f$ of $\Delta^4 f$, want tot daar zijn de termen ongeveer gelijk en liggen ze in de omtrek van 0.

- $f(1,43)$
  We kiezen $x_0 = 1.4$ en we gebruiken *Newton voorwaarts* want $1.43 > 1.4$ en einde tabel

$$\begin{aligned} s &= \frac{x - x_0}{h} \\ &= \frac{1.48 - 1.4}{0.2} \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

De gevraagde waarde kan bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= 3.807 + \binom{s}{1}0.110 + \binom{s}{2}(-0.026) \\ &+ \binom{s}{3}(0.016) + \binom{s}{4}(-0.074) \\ &= 3.827859 \end{aligned}$$

- $f(1,96)$
  We kiezen $x_0 = 2.0$ en we gebruiken *Gauss achterwaarts* want $1.96 < 2$

$$\begin{aligned} s &= \frac{x - x_0}{h} \\ &= \frac{1.96 - 2.0}{0.2} \\ &= -0.2 \end{aligned}$$

  De gevraagde waarde kan bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= 4.075 + \frac{(-0.2)}{1}0.074 \\ &\quad + \frac{(0.8)(-0.2)}{2}(-0.068) + \frac{(0.8)(-0.2)(-1.2)}{6}(-0.056) \\ &= 4.06365 \end{aligned}$$

- $f(2,23)$
  We kiezen $x_0 = 2.2$ en we gebruiken *Gauss voorwaarts* want $2.23 > 2.2$

$$\begin{aligned} s &= \frac{x - x_0}{h} \\ &= \frac{2.23 - 2.2}{0.2} \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

  De gevraagde waarde kan bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= 4.081 + \frac{0.15}{1}(-0.028) \\ &\quad + \frac{(0.15)(-0.85)}{2}(-0.034) + \frac{(0.15)(-0.85)(1.15)}{6}(-0.050) \\ &= 4.08019 \end{aligned}$$

- $f(2,71)$
  We kiezen $x_0 = 2.8$ en we gebruiken *Newton achterwaarts* want $2.71 < 2.8$ en einde tabel

$$\begin{aligned} s &= \frac{x - x_0}{h} \\ &= \frac{2.71 - 2.8}{0.2} \\ &= -0.9 \end{aligned}$$

De gevraagde waarde kan bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} V_n(s) &= 3.777 + \binom{s}{1}(-0.164) + \binom{s+1}{2}(-0.052) \\ &\quad + \binom{s+2}{3}0.032 + \binom{s+3}{4}0.082 \\ &= 3.75388 \end{aligned}$$

3.3 Oefeningen

4 Numerieke afleiding en integratie

4.1 Bepalen van extremum dmv numerieke afleiding

Bepaal het extremum in de omtrek van $x = 2.2$ gebaseerd op de gegevens uit de differentietabel uit sectie 3.2.2.
Vermits we het extremum eerder voor $x = 2.2$ verwachten passen we hier *Gauss achterwaarts* toe.

- Lineaire benadering

$$\begin{aligned}
\frac{dV_n(x)}{dx} &= 0 \\
\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2}\Delta^2 f_{-1} &= 0 \\
0.006 + \frac{2s+1}{2}(-0.034) &= 0 \\
s &= -0.323529
\end{aligned}$$

  We weten echter dat s bepaald is door

$$\begin{aligned}
s &= \frac{x - x_0}{h} \\
sh + x_0 &= x \\
x &= 2.13529
\end{aligned}$$

- Kwadratische benadering

$$\begin{aligned}
\frac{dV_n(x)}{dx} &= 0 \\
\Delta f_{-1} + \frac{2s+1}{2}\Delta^2 f_{-1} + \frac{3s^2-1}{6}\Delta^3 f_{-2} &= 0 \\
0.006 + \frac{2s+1}{2}(-0.034)\frac{3s^2-1}{6}(0.034) &= 0 \\
s &= -0.576554
\end{aligned}$$

  We weten echter dat s, negatief is (dus kunnen we de positieve oplossing verwerpen. Eveneens is s bepaald door

$$\begin{aligned}
s &= \frac{x - x_0}{h} \\
sh + x_0 &= x \\
x &= 2.08469
\end{aligned}$$

4.2 Numerieke integratie

4.2.1 De methode van Newton Cotes

Trapeziumregel We vervangen de functie door een benaderende interpolerende veelterm van de eerste graad ($V_1(x)$). Ook houden we rekening met het feit dat $s = \frac{x-x_0}{h}$ en dus is $dx = hds$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x0}^{x1} f(x)dx \\
&= \int_{x0}^{x1} V_1(x)dx \\
&= \int_0^1 \left(f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0\right) hds \\
&= \int_0^1 \left(f_0 + s\left(f_1 - f_0\right)\right) hds \\
&= h\left[f_0 s + \frac{s^2}{2}\left(f_1 - f_0\right)\right]_0^1 \\
&= h\left[f_0 + \frac{1}{2}\left(f_1 - f_0\right)\right] \\
&= \frac{h}{2}\left(f_0 + f_1\right)
\end{aligned}$$

Hierin is de waarde h de afstand die overeenkomt met het verschil tussen de aanvangs-x-waarden of $h = a - b$.

De regel van Simpson of paraboolregel We splitsen het interval $[a, b]$ op in twee delen met grenzen $a = x_0, b = x_2$ en $\frac{(a+b)}{2} = x_1$. De benaderende veelterm zal een parabool zijn hier is h gegeven door $\frac{b-a}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x0}^{x2} f(x)dx \\
&= \int_{x0}^{x2} V_2(x)dx \\
&= \int_0^2 \left(f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0\right) hds \\
&= \int_0^2 \left(f_0 + s\left(f_1 - f_0\right) + \frac{s\left(s-1\right)}{2}\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right) hds \\
&= \left[f_0 s + \frac{s^2}{2}\left(f_1 - f_0\right) + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4}\right)\cdot\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right]_0^2 \cdot h \\
&= \left[2f_0 + 2f_1 - 2f_0 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right] h
\end{aligned}$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_1 + f_0\right)$$

De $\frac{3}{8}$ste regel We splitsen het interval $[a, b]$ in drie gelijke delen $a = x_0, b = x_3$, vervolgens benaderen we de functie door een derdegraadsveelterm.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_{x0}^{x3} f(x)dx \\
&= \int_{x0}^{x3} V_3(x)dx \\
&= \int_0^3 \left(f_0 + \binom{s}{1}\Delta f_0 + \binom{s}{2}\Delta^2 f_0 + \binom{s}{3}\Delta^3 f_0\right) hds \\
&= \int_0^3 \left(f_0 + s\left(f_1 - f_0\right) + \frac{s\left(s-1\right)}{2}\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{s\left(s-1\right)\left(s-2\right)}{3!}\left(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0\right)\right) hds \\
&= \left[f_0 s + \frac{s^2}{2}\left(f_1 - f_0\right) + \left(\frac{s^3}{6} - \frac{s^2}{4}\right)\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{s^4}{4!} - \frac{3s^3}{3!\cdot 3} + \frac{2s^2}{3!\cdot 2}\right)\left(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0\right)\right]_0^3 h \\
&= \left[3\cdot f_0 + \frac{9}{2}\left(f_1 - f_0\right) + \left(\frac{27}{6} - \frac{9}{4}\right)\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{81}{4!} - \frac{81}{3!\cdot 3} + \frac{18}{3!\cdot 2}\right)\left(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0\right)\right] h \\
&= \left[3\cdot f_0 + \frac{9}{2}\left(f_1 - f_0\right) + \frac{9}{4}\left(f_2 - 2f_1 + f_0\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8}\left(f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0\right)\right] h \\
&= \frac{h}{8}\left(f_0\left(24 - 36 + 18 - 21\right) + f_1\left(36 - 36 + 9\right) + f_2\left(18 - 9\right) + 3f_3\right) \\
&= \frac{3}{8}h\left(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right)
\end{aligned}$$

Deze methode is niet nauwkeuriger dan de paraboolregel.

De uitgebreide $\frac{3}{8}$ste regel Het aantal deelintervallen is een veelvoud van drie.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{3}{8}\cdot\frac{b-a}{n}\left(f_0 + f_n + 3\left(f_1 + f_2 + f_4 + f5 + f_7 + \ldots + f_{n-1}\right)\right. \\
&\quad \left. + 2\left(f_3 + f_6 + \ldots + f_{n-3}\right)\right)
\end{aligned}$$

4.2.2 Toepassing op Newton-Cotes

Bereken de integraal:

$$\int_{1,6}^{2,8} f(x)dx$$

Wanneer je weet dat *f(x)* bepaald wordt door de tabel uit *3.2.2*. Bereken dit via de *trapeziumregel*, de *paraboolregel*, de *uitgebreide trapeziumregel* en de *uitgebreide paraboolregel*.

De Trapeziumregel

$$\begin{aligned}\int_{1,6}^{2,8} f(x)dx &= \frac{2.8-1.6}{2}(3.917+3.777)\\ &= 4.6164\end{aligned}$$

De Paraboolregel

$$\begin{aligned}\int_{1,6}^{2,8} f(x)dx &= \frac{\frac{2.8-1.6}{2}}{3}(3.917+4\cdot 4.4081+3.777)\\ &= 4.8036\end{aligned}$$

De Uitgebreide Trapeziumregel [5]

$$\begin{aligned}\int_{1,6}^{2,8} f(x)dx &= \frac{\frac{2.8-1.6}{3}}{2}\left(\frac{(3.917+3.777)}{2}\right.\\ &\quad \left.+4.001+4.075+4.081+4.053+3.941\right)\\ &= 4.7996\end{aligned}$$

De Uitgebreide Paraboolregel

$$\begin{aligned}\int_{1,6}^{2,8} f(x)dx &= \frac{\frac{2.8-1.6}{6}}{3}(3.917+3.777\\ &\quad +2(4.075+4.053)+4(4.001+4.081+3.941))\\ &= 4.8028\end{aligned}$$

[5] Intervalgrootte is hier 6

4.3 Romberg

De fout op romberg is gegeven door $\frac{(b-a)^{3-2i}}{n^{(2+2i)}}$.

4.4 Integratiemethode van Gauss-Legendre

Het voordeel aan deze methode is dat equidistantie geen vereiste niet meer is.[6]

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + f_n(a_n)$$

We voeren een transformatie uit, $f(x)$ wordt een veelterm van de graad *2n-1*. We voeren een coordinatentransformatie uit van $[a, b]$ naar $[-1, 1]$. Hiervoor vervangen we x door t. We stellen hiervoor de transformatieformule op.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ t + 1 &= \frac{2}{b-a}(x - a) \\ \frac{b-a}{2}t + \frac{b-a}{2} &= x - a \\ x &= \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Wanneer we rekening houden met het feit dat $dx = \frac{1}{2}(b-a)dt$ bekomen we:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^1 F(t)dt \\ \int_{-1}^1 F(t)dt &\approx A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2) + \cdots + A_n F(t_n) \end{aligned}$$

Een eerste benadering krijgen we wanneer we stellen dat $n = 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(t)dt &= A_1 F(t_1) \\ \int_{-1}^1 t^0 dt &= [t]_{-1}^t = 2 = A_1 \\ \int_{-1}^1 t^1 dt &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^1 = 0 = A_1 t_1 \end{aligned}$$

[6] Dit in tegenstelling tot de methode van Newton-Cotes

Maar vermits A_1 2 is moet t_1 gelijk zijn aan nul.

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = 2F(0)$$

Dus de oppervlakte komt overeen met een rechtoek met hoogte *F(0)* en met 2 als basis. (2 komt overeen met de afstand tussen de grenzen).
Een tweede benadering krijjgen we wanneer we stellen dat $n = 2$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} F(t)dt &= A_1F(t_1) + A_2F(t_2) \\
\int_{-1}^{1} t^0 dt &= [t]_{-1}^{1} = A_1 + A_2 = 2 \\
\int_{-1}^{1} t^1 dt &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{1} = A_1t_1 + A_2t_1 = 0 \\
\int_{-1}^{1} t^2 dt &= \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = A_1t_2^2 + A_2t_2^2 = \frac{2}{3} \\
\int_{-1}^{1} t^3 dt &= \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{1} = A_1t_2^3 + A_2t_2^3 = 0
\end{aligned}$$

Van dit stelsel zijn de oplossingen $A_1 = A_2 = 1$ en $t_1 = -t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\int_{-1}^{1} F(t)dt = F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

4.5 Oefeningen

5 Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen

5.1 De methode van Taylor

We beginnen met een eerste orde differentiaalvergelijking $y' = f(x, y)$ die de beginwaarde $y(x_0) = y_0$ aanneemt. We stellen $y = \varphi(x)$ een oplossing die hieraan voldoet. We bepalen nu een *Taylorontwikkeling* in de omgeving van x_0:

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \frac{h}{1!}\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_0) + \cdots$$

Hierbij is:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= y' = f(x, y) \\
\varphi''(x) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}y' = f'_x + f'_y f \\
\varphi'''(x) &= f''_{xx} + 2f''_{xy}f + f''_{yy}f^2 + f'_x f'_y + f'^2_y f
\end{aligned}$$

5.1.1 Voorbeeld

Gegeven de dvg $y' = -xy^2$ met $y(0) = 2$ (gaat dus door het punt *(0,2)*), we nemen ook *h=0,1*

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= y \\
\varphi'(x) &= y' = -xy^2 \\
\varphi''(x) &= -y^2 - 2xyy' \\
\varphi'''(x) &= 0 + 2(-2y)y' + (-2x)y'^2 + (-xy)(-y^2) + y'(-2xy)^2
\end{aligned}$$

Hierin vullen we de waarden voor x,y en y' in:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= y = 2 \\
\varphi'(x) &= y' = 0 \\
\varphi''(x) &= -2^2 = -4 \\
\varphi'''(x) &= 0
\end{aligned}$$

Dit subsitueren we in de *Taylorontwikkeling* rond $\varphi(0 + 0.1)$

$$\begin{aligned}
\varphi(0 + 0.1) &= 2 + \frac{0.1}{1} \cdot 0 + \frac{0.01}{2}(-4) + 0 + \cdots \\
&\approx 2 - 2.02 \\
&\approx 1.98
\end{aligned}$$

5.2 De methode van Euler en van Heun

5.2.1 De methode van Euler

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

Hierbij is $h = x_{k+1} - x_k$

5.2.2 De methode van van Heun

De methode van van Heun is een verbetering van deze van Euler waarbij men de waarde voor de gevonden y vervangt door:

$$(y_1)_{nieuw} = y_0 + h\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}$$

5.2.3 Voorbeeld

Hier passen we de methode van Euler en van Heun toe op het voorbeeld uit *5.1.1.*
Euler:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + 0.1 \cdot f(0, 2) \\ y_1 &= 2 + 0.1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

van Heun, hierbij is $x_1 = x_0 + h$ en is y_1 de h waarde bekomen door Euler:

$$\begin{aligned} (y_1)_{nieuw} &= y_0 + h\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2} \\ (y_1)_{nieuw} &= 2 + 0.1\frac{f(0, 2) + f(0.1, 2)}{2} \\ (y_1)_{nieuw} &= 2 + 0.1\frac{0 + (-0.1 \cdot 2^2)}{2} \\ (y_1)_{nieuw} &= 1.98 \end{aligned}$$

Euler:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\ &= 1.98 + 0.1 \cdot (-0.1) \cdot (1.98)^2 \\ &= 1.940796 \end{aligned}$$

Hierna kunnen we terug van Heun toepassen en daarna terug Euler tot de gewenste precisie bereikt is.

5.3 De methode van Runga-Kutta

$$\int_{x0}^{x0+h} f(x,\varphi(x))dx \approx \frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

Hierbij is

$$\begin{cases} k_1 &= h\cdot f_0 \\ k_2 &= h\cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= h\cdot f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= h\cdot f\left(x_0+h, y_0+k_3\right) \end{cases}$$

5.3.1 Voorbeeld

We passen deze methode op hetzelfde probleem als *5.1.1* toe. ($y' = -xy^2$ met $y(0) = 2$).

$$\begin{cases} k_1 &= 0.1\cdot f\left(0,2\right) = 0 \\ k_2 &= 0.1\cdot f\left(0+0.05, 2+0\right) = -0.02 \\ k_3 &= 0.1\cdot f\left(0+0.05, 2-0.01\right) = -0.0198005 \\ k_4 &= 0.1\cdot f\left(0+0.1, 2-0.0198005\right) = -0.039212 \end{cases}$$

Wanneer we deze waarden substitueren in de integraal:

$$\begin{aligned} \int_0^{0.1} f(x,\varphi(x))dx &\approx \frac{1}{6}(0+2\cdot(-0.02)+2\cdot(-0.0198005)+(-0.039212)) \\ &\approx -0.019802 \end{aligned}$$

5.4 Oefeningen

6 Matrices

6.1 Iteratieve methode voor het oplossen van lineaire stelsels

6.1.1 Methode

We beschouwen volgend stelsel:

$$\begin{cases} 16x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 - x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 16x_4 = 3 \end{cases}$$

Dit stelsel herleiden we naar het stelsel dat we zullen gebruiken voor onze iteratieve methode, dit stelsel kent de volgende vorm

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n) \\ x_2 = \varphi(x_1, x_3, x_4, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ x_n = \varphi(x_1, x_3, x_4, \cdots, x_{n-1}) \end{cases}$$

Wanneer we hierin de waarden van onze opgave invullen geeft dit ons:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{16} - \frac{7}{16} \cdot x_2 - \frac{1}{16} \cdot x_3 + \frac{1}{16} \cdot x_4 \\ x_2 = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} \cdot x_1 + \frac{1}{8} \cdot x_3 + \frac{1}{8} \cdot x_4 \\ x_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot x_1 - \frac{3}{8} \cdot x_2 + \frac{1}{8} \cdot x_4 \\ x_4 = \frac{3}{16} - \frac{2}{16} \cdot x_1 + 2\frac{1}{16} \cdot x_2 - \frac{1}{16} \cdot x_3 \end{cases}$$

Als beginwaarde voor onze iteratieve methode nemen we de constanten uit het stelsel. Onze startwaarde is dus $\left(\frac{5}{16}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right)$. We substitueren deze oplossing in het voorgaand stelsel.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{16} - \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{16} \\ x_2 = \frac{7}{8} - \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} \\ x_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{16} - \frac{3}{8} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{16} \\ x_4 = \frac{3}{16} - \frac{2}{16} \cdot \frac{5}{16} + 2\frac{1}{16} \cdot \frac{7}{8} - \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{8} \end{cases}$$

Dit geeft volgend resultaat:

$$\begin{cases} x_1 = -0.066406 \\ x_2 = \ \ 0.835938 \\ x_3 = \ \ 0.21875 \\ x_4 = \ \ 0.25 \end{cases}$$

Wanneer we dit blijven herhalen bekomen we uiteindelijk het eindresultaat. We kunnen de convergentie echter makkelijk versnellen zonder veel inspanning daarvoor te leveren. Wanneer we de nieuwe waarde voor x_1 gebruiken om de waarde voor x_2 te bepalen en de waarden voor x_1 en x_2 gebruiken om de nieuwe waarde voor x_3 te bepalen.

6.1.2 Voldoende voorwaarde voor convergentie

Er treed convergentie op wanneer:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right| \leq 1$$

In ons geval moet $\frac{7}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \leq 1$ of de som van de coëfficiënten die voor een onbekende staan (exclusief de constante term dus) in absolutewaarde moet kleiner zijn dan 1. En dit voor *elke* vergelijking Vermits deze constante term ontstaat door een herleiding van het stelsel kunnen we deze voorwaarde herschrijven in functie van de elementen op de hoofddiagonaal alsvolgt:

$$\sum_{j=0, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

6.2 Matrix-inversie

6.2.1 Methode

Algemeen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}x &= \mathbf{A}^{-1} \cdot b \\ x &= \mathbf{A}^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Volgens Crout

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \\ \text{Dus :} & \\ \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \\ \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{U} \\ \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} \\ \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{I}_n \\ \text{Zodat :} & \\ \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1} \end{aligned}$$

6.2.2 Oplossing gebaseerd op Gaussreductie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dit werken we uit door een soort gaussreductie toe te passen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \frac{-5}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{24} & \frac{4}{24} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{24} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{24} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} \end{array}\right)$$

6.3 Eigenwaarden en eigenvectoren

6.3.1 Definities

A is een vierkante matrix:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} \quad = \quad s \cdot \mathbf{c}$$

De vector **c** wordt in zichzelf omgezet. **c** is hier de eigenvector, s is de overeenkomstige eigenwaarde.
Bijvoorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathbf{s} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\cdot\mathbf{c} &= s\cdot\mathbf{c}\\
\mathbf{A}\cdot\mathbf{c}-s\cdot\mathbf{c} &= 0\\
(\mathbf{A}-s\mathbf{I_n})\,\mathbf{c} &= 0
\end{aligned}$$

Dit resulteert in een homogeen stelsel in $c_1, c_2, \cdots, c_n$, dit is oplosbaar wanneer de $det(\mathbf{A}-s\mathbf{I_n})) = 0$. Er bestaan dan niet triviale oplossingen.

6.3.2 Voorbeeld 1

Gegeven is de matrix uit de sectie definities:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0\\ -2 & 6 & -2\\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 7-s & -2 & 0\\ -2 & 6-s & -2\\ 0 & -2 & 5-s \end{pmatrix}\\
\begin{vmatrix} 7-s & -2 & 0\\ -2 & 6-s & -2\\ 0 & -2 & 5-s \end{vmatrix} &= 0\\
(7-s)\left((6-s)\cdot(5-s)-4\right)+2\left(-2\,(5-s)\right) &= 0\\
(7-s)(6-s)(5-s)-4(7-s)-4(5-s) &= 0\\
(7-s)(6-s)(5-s)-4(12-2s) &= 0\\
(6-s)\cdot\left(35-12s+s^2-8\right) &= 0\\
(6-s)(s-3)(s-9) &= 0
\end{aligned}$$

We hebben dus drie mogelijk eigenwaarden namelijk $s_1 = 3, s_2 = 6$ en $s_3 = 9$, nu bepalen we voor elke eigenwaarde de bijhorende eigenvector.

De eerste eigenvector Hier is $s = 3$ of:

$$\begin{cases} 4x-2y+0z=0\\ -2x+3y-2z=0\\ 0x-2y+2z=0 \end{cases}$$

In dit stelsel moet 1 van de vergelijkingen/parameters te schrijven zijn als functie van de andere vergelijkingen/parameters. Het resultaat is hier:

$$\vec{c} = \left\{\frac{\alpha}{2}, \alpha, \alpha\right\}$$

Dit herleiden we tot een eenheidsvector, dit is een vector met lengte 1. [7]

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\| &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2+\alpha^2}\\
\|\vec{c}\| &= \frac{3}{2}\alpha
\end{aligned}$$

[7] Een eindheidsvector bekom je door de vector te delen door zijn norm

De eigenvector wordt dus:

$$\vec{e_1} = \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$$

De tweede eigenvector Hier is $s = 6$ of

$$\begin{cases} x - 2y + 0z = 0 \\ -2x + 0y - 2z = 0 \\ 0x - 2y + -1z = 0 \end{cases}$$

In dit stelsel moet 1 van de vergelijkingen/parameters te schrijven zijn als functie van de andere vergelijkingen/parameters. Het resultaat is hier:

$$\vec{c} = \{2\alpha, \alpha, -2\alpha\}$$

Dit herleiden we tot een eenheidsvector, dit is een vector met lengte 1.

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\| &= \sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2 + 4\alpha^2} \\ \|\vec{c}\| &= 3\alpha \end{aligned}$$

De eigenvector wordt dus:

$$\vec{e_2} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right\}$$

De derde eigenvector Hier is $s = 9$ of

$$\begin{cases} -2x - 2y + 0z = 0 \\ -2x - 3y - 2z = 0 \\ 0x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

In dit stelsel moet 1 van de vergelijkingen/parameters te schrijven zijn als functie van de andere vergelijkingen/parameters. Het resultaat is hier:

$$\vec{c} = \left\{-\alpha, \alpha, -\frac{\alpha}{2}\right\}$$

Dit herleiden we tot een eenheidsvector, dit is een vector met lengte 1.

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\| &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \\ \|\vec{c}\| &= \frac{3}{2}\alpha \end{aligned}$$

De eigenvector wordt dus:

$$\vec{e_3} = \left\{\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, -3\right\}$$

Besluit **A** is een symmetrische matrix, dan zijn $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ en $\vec{e_3}$ twee per twee onderline loodrecht of:

$$\begin{cases} \vec{e_1} \cdot \vec{e_2}=0 \\ \vec{e_1} \cdot \vec{e_3}=0 \\ \vec{e_2} \cdot \vec{e_3}=0 \end{cases}$$

6.3.3 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-s & 2 & -4 \\ 2 & -2-s & -2 \\ -4 & -2 & 1-s \end{pmatrix} \\
\begin{vmatrix} 1-s & 2 & -4 \\ 2 & -2-s & -2 \\ -4 & -2 & 1-s \end{vmatrix} &= 0 \\
-(1-s)^2(s+2) + 32 + 16(2+s) - 8(1-s) &= 0 \\
-(s+2)(s^2-2s+1) + 32 + 32 + 16s - 8 + 8s &= 0 \\
-s^3 + 3s - 2 + 24s + 56 &= 0 \\
s^3 - 27s + 54 &= 0 \\
(s-6)(s+3)^2 &= 0
\end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus $s_1 = 6$ en $s_2 = s_3 = -3$. Voor elk bepalen we nu de eigenvector.

De eerste eigenvector Hier is $s = 6$ of

$$\begin{cases} -5x + 2y + -4z=0 \\ 2x - 8y - 2z=0 \\ -4x - 2y - 5z=0 \end{cases}$$

Dit stelsel kunnen we herleiden tot :

$$\begin{cases} -5x + 2y + -4z=0 \\ -18x + 0y - 18z=0 \\ -9x + 0y - 9z=0 \end{cases}$$

In dit stelsel is 1 van de vergelijkingen/parameters te schrijven zijn als functie van de andere vergelijkingen/parameters. Het resultaat is hier:

$$\vec{c} = \left\{\alpha, \frac{\alpha}{2}, -\alpha\right\}$$

Dit herleiden we tot een eenheidsvector, dit is een vector met lengte 1.

$$\begin{aligned}
\|\vec{c}\| &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4}} \\
\|\vec{c}\| &= \frac{3}{2}\alpha
\end{aligned}$$

De eigenvector wordt dus:

$$\vec{e_1} = \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right\}$$

De tweede eigenvector Hier is $s = -3$ of

$$\begin{cases} 4x + 2y + -4z = 0 \\ 2x + 1y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$$

In dit stelsel is 1 van de vergelijkingen/parameters te schrijven zijn als functie van de andere vergelijkingen/parameters. Het resultaat is hier:

$$\vec{c} = \{\alpha, 0, \alpha\}$$

Dit herleiden we tot een eenheidsvector, dit is een vector met lengte 1.

$$\begin{aligned} \|\vec{c}\| &= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2} \\ \|\vec{c}\| &= \sqrt{2} \cdot \alpha \end{aligned}$$

De eigenvector wordt dus:

$$\vec{e_2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

De derde eigenvector De derde eigenvector bepalen we (vermits er geen eigenwaarden meer resteren) door de vector met lengte 1 te bepalen die loodrecht staat op de andere twee of: [8]

$$\vec{e_3} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left\{ \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}} \right\}$$

Deze norm van deze laatste vector is 1 en is metgevolg de eenheidsvector die we zochten.

6.3.4 Voorbeeld bij een niet symmetrische matrix

Beschouw onderstaande matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

De karakteristieke determinant wordt nu:

$$\begin{vmatrix} 3 - s & 2 \\ 1 & 2 - s \end{vmatrix} = 0$$

[8] We steunen hier op de eigenschappen van het vectorieel product

Dit uitgewerkt geeft:

$$\begin{aligned}(3-s)(2-s)-2 &= 0\\ (s-1)(s-4) &= 0\end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn $s_1 = 1$ en $s_2 = 4$.
Voor $s = 1$

$$\begin{cases} 2x+2y=0\\ x+y=0\end{cases}$$

De oplossing loopt evenwijdig met $k, -k$, de eenheidsvector is gegeven door $\vec{e_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Voor $s = 4$

$$\begin{cases} -x+2y=0\\ x-2y=0\end{cases}$$

De oplossing loopt evenwijdig met $2k, k$, de eenheidsvector is gegeven door $\vec{e_2} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.
Deze vectoren staan NIET loodrecht op elkaar $\vec{e_1} \cdot \vec{e_2} = \sqrt{2}\sqrt{10} - \frac{1}{\sqrt{10}} \neq 0$. Dit is zo omdat de matrix niet symmetrisch is.

6.4 Oefeningen

- Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren behorend bij de matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

  Ga na dat de drie eigenvectoren twee per twee loodrecht op elkaar staan.
  We bepale nde karakteristieke vergelijking van de determinant $(\mathbf{A}-s\mathbf{I}_n) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-s & -1 & 0\\ -1 & 2-s & -1\\ 0 & -1 & 2-s\end{vmatrix} = 0$$

  Deze determinant geeft uitgewerkt:

$$\begin{aligned}(2-s)^3 - 2(2-s) &= 0\\ (2-s)\cdot(s^2-4s+2) &= 0\end{aligned}$$

  De eigenwaarden zijn dus $s_1 = 2, s_2 = 2-\sqrt{2}$ en $s_3 = 2+\sqrt{2}$.
  Voor s_1

$$\begin{cases} 0x-y+0z=0\\ -x+0y-z=0\\ 0x-y+0z=0\end{cases}$$

Als $y = 0$ dan is $x = -z$ dus $\vec{c_1}$ is evenwijdig met $\{k, 0, -k\}$, wanneer we deze vector delen door zijn norm bekomen we de eenheidsvector $\vec{e_1} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$
Voor s_2

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - y + 0z = 0 \\ -x + \sqrt{2}y - z = 0 \\ 0x - y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

Als $x = \frac{1}{\sqrt{2}}y$ dan is $z = \frac{1}{\sqrt{2}}y$ dus $\vec{c_2}$ is evenwijdig met $\{\frac{k}{\sqrt{2}}, k, \frac{k}{\sqrt{2}}$, wanneer we deze vector delen door zijn norm bekomen we de eenheidsvector $\vec{e_2} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\}$
Voor s_3 bekomen we $\vec{e_3} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right\}$
Deze staan onderling twee aan twee loodrecht op elkaar.

- Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren behorend bij de matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

- Extra oefening:

$$\begin{pmatrix} 0 & -9 & -3 \\ -9 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

7 Lineaire programmatie

7.1 Elementaire begrippen

We vertrekken van een doelfunctie H, deze moet een maximum bereiken. Deze doelfunctie is echter afhankelijk van meerdere variabelen elke met een coëfficiënt die het gewicht van deze veriabele in het geheel bepaalt. Verder zijn er nog een aantal extra voorwaarden (de beperkingen) die onderlinge verbanden vastleggen.

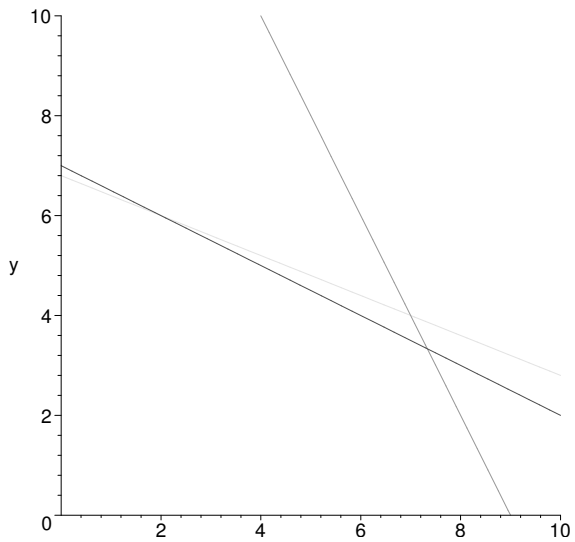
7.1.1 Voorbeeld

Gegeven de doelfunctie $H = 4x_1+7x_2$, deze functie moet maximaal zijn. Volgende beperkingen zijn eveneens gegeven:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 2x_1 + x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 34 \end{cases}$$

Verder moet $x_1 \geq 0$ en $x_2 \geq 0$. Deze situatie is uitgetekend in bijgevoegde figuur. In deze figuur wordt een veelhoek bepaald, een veelhoek met 5 hoekpunten, deze 5 bruikbare oplossingen noemt met de *basispunten*. De optimale oplossing is basisoplossing waarvoor H maximaal is.

De oplossing die we zoeken is deze die we kunnen vinden door de doelfunctie



Figuur 13: Plot van de beperkingen van $H = 4x_1 + 7x_2$

van rechts naar links te verschuiven, het eerste basispunt dat de doelfunctie snijdt tijdens het evenwijdig verschuiven van rechts naar links is de oplossing. In dit geval is de oplossing het basispunt met x-coördinaat tussen de 6 en de 8.

We bekomen deze oplossing door het snijpunt tussen de twee beperkingen te bepalen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 14 \\ 2x_1 + x_2 = 18 \end{cases}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{22}{3} \\ x_2 = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Men stopt deze waarden in de doelfunctie en dan bekomen we $H = \frac{158}{3}$. Men kan, om absolute zekerheid te krijgen, de andere basispunten bepalen en kijken of deze effectief kleiner zijn dan onze oplossing.
Deze methode is enkel geldig bij 2 veranderlijken, het wordt moeilijk zulke problemen voor 3 coëfficiënten en meer grafisch uit te werken. Om zulke problemen op te lossen is er de *Simplex methode*.

7.2 De simplex methode voor maximumproblemen

7.2.1 De simplex methode in 4 stappen

Stap 1 In de eerste stap plaatsen we het geheel in matrixvorm, eerst komt de coëfficiëntenmatrix[9], daarna komt een vierkante eenheidsmatrix met als grootte het aantal vergelijkingen, daarna komt een rijmatrix die de uitkomsten van de restricties bevat. Men voegt vervolgens onbekenden toe, evenveel als de eenheidsmatrix rijen (of kolommen) heeft. Boven elke kolom schrijft men de coëfficiënten van doelfunctie aangevuld met de de bijgevoegde onbekenden wiens coëfficiënten nul zijn. Deze bovenaan toegevoegde rij voegt men onderaan toe nadat men deze met -1 vermenigvuldigt heeft. Links schrijft men een onbekende voor elke rij, de onbekende voor de eerste rij is de eerste onbekende die men heeft toegevoegd en zo verder tot de laatste rij (dit moet men niet doen voor de rijen die we in deze stap hebben toegevoegd).

Stap 2 Indien alle coëfficiënten van de laatste rij die we toegevoegd hebben hetzelfde teken hebben dan stoppen we.

Stap 3 We bepalen de sleutelkolom[10], in deze sleutekolom bepalen we het sleutelgetal[11].

[9] Deze bevat de coëfficiënten van de restricties

[10] Dit is de kolom waar de meest negatieve waarde onder staat in de laatste rij omdat deze het meeste effect geeft

[11] Dit is de waarde in de sleutekolom die het meeste effect zal geven we bepalen de waarde waarvoor we, wanneer we de waarde uit de uiterst rechtse kolom hierdoor delen, een minimum bekomen

Stap 4 We vervangen de sleutelkolom door een kolom die enkel nullen bevat, uitgezonderd op de plaats van de sleutelwaarde (we drukken het uit in functie van de nieuwe basis). Vervolgens bepalen we alle andere waarden[12]. Dit doen we *ook* voor de onderste rij. Rechts vervangen we de onbekende die voor de rij staat waar de sleutelwaarde stond door de onbekende die overeenkomt met de sleutelwaarde. En nu gaan we terug naar stap 2.

7.2.2 De simplexmethode toegepast op 7.1.1.

	4	7	0	0	0	MAX
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	2	1	0	0	14
x_4	2	1	0	1	0	18
x_5	2	**5**	0	0	1	34
	-4	**-7**	0	0	0	0
x_3	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	0	1	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_4	$\frac{8}{5}$	0	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{56}{5}$
x_2	$\frac{2}{5}$	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{34}{5}$
	$\mathbf{\frac{-6}{5}}$	0	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{238}{5}$
x_1	1	0	5	0	-2	2
x_4	0	0	-8	1	**3**	8
x_2	0	1	-2	0	1	6
	0	0	6	0	**-1**	50
x_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{22}{3}$
x_5	0	0	$\frac{-8}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{158}{3}$

Aan linksonderaan kan met zien dat x_1, x_2 en x_5 de variabelen zijn die niet nul zijn, aan de rechterkant kan men de waarden voor deze variabelen (de oplossingen aflezen). De sleutelkolom en de sleutelwaarden zijn telkenmale in het **vet** aangeduid. Rechtsonderaan ziet men de maximumwaarde. Bij het bepalen van de sleutelwaarden beschouwt met enkele de waarden uit de sleutelkolom die groter zijn dan nul, indien zo geen element aanwezig is, is het geheel niet oplosbaar. In de simplexmethode verspring je van mogelijke oplossing naar mogelijke oplossing, de maximale is deze waar alle onderste elementen nul zijn. Ook visueel te zien op de tekening.

[12] We bepalen deze zoals we bij de Gaussreductie een nulkolom met slechts één één in bekomen

7.3 De simplexmethode voor minimumproblemen

De beperkingen zijn van de vorm $ax \geq b$ en H moet minimaal zijn.

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \end{cases}$$

Hierbij zijn zowel x_1 als x_2 groter dan nul en moet $H = 3.2x_1 + 2.5x_2$ minimaal zijn.
Terug voeren we een soort slack variabelen in, dit geeft ons vergelijking 1.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 &= 12 \end{aligned}$$

We voeren nogmaals extra variabelen in, dit geeft ons vergelijking 2.

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_7 &= 12 \\ x_1 + 4x_2 - x_5 + x_8 &= 12 \end{aligned}$$

Alle 6 de bijgevoegde variabelen zijn groter dan of gelijk aan nul.
Indien $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, 0, 0, 0)$ een oplossing is van vergelijking 2 dan volgt hieruit dat $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$ een oplossing van vergelijking 1 en de doelfunctie G voor vergelijking 2 is dan $G = 0$.
We kiezen als eerste basisoplossing $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ zodat $x_6 = 10, x_7 = 12, x_8 = 12$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_6	5	1	-1	0	0	1	0	0	10
x_7	2	2	0	-1	0	0	1	0	12
x_8	1	4	0	0	-1	0	0	1	12
	3.2	2.5	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_6	**5**	1	-1	0	0	1	0	0	10
x_7	2	2	0	-1	0	0	1	0	12
x_8	1	4	0	0	-1	0	0	1	12
	3.2	2.5	0	0	0	0	0	0	0
†	**-8**	-7	1	1	1	0	0	0	-34
x_1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	2
x_7	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	-1	0	$\frac{-2}{5}$	1	0	8
x_8	0	$\mathbf{\frac{19}{5}}$	$\frac{1}{5}$	0	-1	$\frac{-1}{5}$	0	1	10
	0	$\frac{93}{50}$	$\frac{16}{25}$	0	0	$\frac{-16}{25}$	0	0	$\frac{-32}{5}$
	0	$\mathbf{\frac{-27}{5}}$	$\frac{-3}{5}$	1	1	$\frac{8}{5}$	0	0	-18
x_1	1	0	$\frac{-4}{19}$	0	$\frac{1}{19}$	$\frac{4}{19}$	0	$\frac{-1}{19}$	$\frac{28}{19}$
x_7	0	0	$\frac{6}{19}$	-1	$\mathbf{\frac{8}{19}}$	$\frac{-6}{19}$	1	$\frac{-8}{19}$	$\frac{72}{19}$
x_2	0	1	$\frac{1}{19}$	0	$\frac{-5}{19}$	$\frac{-1}{19}$	0	$\frac{5}{19}$	$\frac{50}{19}$
	0	0	$\frac{103}{190}$	0	$\frac{93}{190}$	$\frac{-103}{190}$	0	$\frac{-93}{190}$	$\frac{-1073}{95}$
	0	0	$\frac{-6}{19}$	1	$\mathbf{\frac{-8}{19}}$	$\frac{25}{19}$	0	$\frac{27}{19}$	$\frac{-72}{19}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	0	1
x_5	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{-19}{8}$	1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{8}$	-1	9
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-5}{8}$	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{5}{8}$	0	5

†: bekomt men door van de originele rij de rijen waar x_6, x_7 en x_8 voor staan af te trekken.
Als laatste controle zouden de 2 laatste rijen G en H enkel positieve getallen mogen bevatten, wegens luiheid ben ik bereid aan te nemen dat deze enkel positieve getallen bevatten. De volgende sectie zal de uitgekomen oplossingen bevestigen. G is dan

$$\frac{-72}{19} + \frac{8}{19} \cdot 9 = 0$$

en H is dan

$$\frac{-1073}{95} - \frac{93}{190} \cdot 9 = -15.7$$

we hebben echter het geheel in het begin met -1 vermenigvuldigt om het minimumprobleem te herleiden tot een maximum probleem. Dus het minimum is hier 15.7 ipv -15.7

7.4 Het dualiteitsprincipe

Vermits de methode uit vorige sectie nogal langdradig is passen we deze methode soms toe, deze bestaat uit het transponeren van de matrices (die men bekomt

indien met het probleem in matrixnotatie opschrijft). De beperkingen worden dan:

$$5y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3.2$$
$$y_1 + 2y_2 + 4y_3 \leq 2.5$$

Het probleem wordt herleid tot $H = 10y_1 + 12y_2 + 12y_3$, dit moet maximaal zijn. Dit lossen we nu op voor de *normale* Simplex methode.

	10	12	12	0	0	MAX
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_4	5	2	1	1	0	3.2
y_5	1	2	**4**	0	1	2.5
	-10	-12	**-12**	0	0	0
y_4	$\mathbf{\frac{19}{4}}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{103}{40}$
y_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$
	-7	-6	0	0	3	$\frac{15}{2}$
y_1	1	$\frac{6}{19}$	0	$\frac{4}{19}$	$\frac{-1}{19}$	$\frac{103}{190}$
y_3	0	$\mathbf{\frac{8}{19}}$	1	$\frac{-1}{19}$	$\frac{5}{19}$	$\frac{93}{190}$
	0	$\mathbf{\frac{-72}{19}}$	0	$\frac{28}{19}$	$\frac{50}{19}$	$\frac{1073}{95}$
y_1	1	0	$\frac{-6}{19}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{7}{40}$
y_2	0	1	$\frac{19}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{93}{50}$
	0	0	9	!1!	!5!	$\frac{157}{10}$

Wanneer men de oplossing $\left(\frac{7}{40}, \frac{93}{50}, 0\right)$ in de getransponeerde formule voor H stopt bekomt men dat $H = \frac{157}{10}$. Men kan de overeenstemmende waarden voor x_1 en x_2 ook aflezen uit de tabel (zie uitroepingstekens) maar we kunnen deze evengoed uit de beperkingen en de maximumvergelijking halen.

7.5 Oefeningen

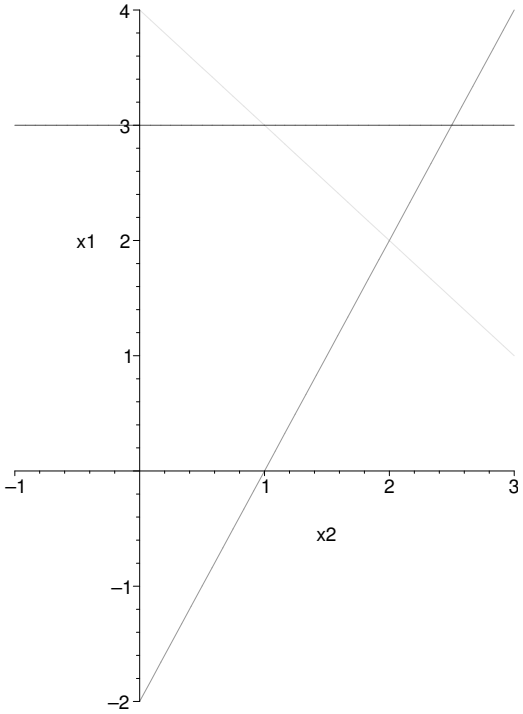
1. Zoek x_1 en x_2 die voldoen aan de ongelijkheden:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$

Met $x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, 3$ zo dat:

- de functie $F = x_2 - x_1$ gemaximaliseerd wordt.
- de functie $G = 2x_1 + x_2$ gemaximaliseerd wordt.

- Voor F:



Figuur 14: Plot van de beperkingen van oefening 1

	-1	1	0	0	0	MAX
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-1	**2**	1	0	0	2
x_4	1	1	0	1	0	4
x_5	1	0	0	0	1	3
	1	**-1**	0	0	0	0
x_2	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	1	0	3
x_5	1	0	0	0	1	3
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1

De functie F is maximaal, zijnde 1 als x_1 gelijk is aan 0 en x_2 gelijk is aan 1.

- Voor G:

	2	1	0	0	0	MAX
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	-1	2	1	0	0	2
x_4	1	1	0	1	0	4
x_5	**1**	0	0	0	1	3
	-2	-1	0	0	0	0
x_3	0	2	1	0	1	5
x_4	0	**1**	0	1	-1	1
x_1	1	0	0	0	1	3
	0	**-1**	0	0	2	6
x_3	0	0	1	-2	5	3
x_2	0	1	0	1	-1	1
x_1	1	0	0	0	1	3
	0	0	0	1	1	7

Hieruit volgt dat G maximum 7 is als $x_1 = 3$ en $x_2 = 1$.

2. Maximaliseer de functie $H = 60x_1 + 60x_2 + 90x_3 + 90x_4$ onderworpen aan de volgende beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 1 \end{cases}$$

Hierbij is $x_i \geq 0$ voor $i = 1, 2, 3, 4$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	60	60	90	90	0	0	0	MAX
x_5	1	1	1	1	1	0	0	15
x_6	7	5	3	2	0	1	0	1
x_7	3	5	10	**15**	0	0	1	1
	-60	-60	-90	**-90**	0	0	0	0
x_5	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{14}{15}$	$\frac{224}{15}$
x_6	$\frac{33}{5}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\frac{-2}{15}$	$\frac{13}{15}$
x_4	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
	-42	-30	-30	0	0	0	6	6
x_5	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-7}{3}$	-4	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{44}{3}$
x_6	0	$\frac{-20}{3}$	$\frac{-61}{3}$	-33	0	1	$\frac{-7}{3}$	$\frac{-4}{3}$
x_1	1	**53**	$\frac{10}{3}$	5	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	**-16**	-2	210	0	0	20	20
x_5	†	0	†	†	1	0	†	†
x_6	†	0	†	†	0	1	†	†
x_2	$\frac{3}{5}$	1	2	3	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{48}{5}$	0	30	290	0	0	$\frac{116}{5}$	$\frac{116}{5}$

† wil zeggen dat we deze waarden niet hebben uitgerekend omdat deze toch niet nodig zijn om het eindresultaat te bekomen. Het eindresultaat is hier $x_2 = 0.2$ en de andere zijn gelijk aan nul. Het maximum is dan $\frac{116}{5}$.

3. Op een machine die niet meer dan 45 uur per week draait, worden 3 artikelen A, B en C gemaakt. De winst bedraagt rescpectievelijk 4,12 en 3 euro per stuk. Per uur worden van A 50 stuks gemaakt, van B 25 en van C 75 stuks. De wekelijkse verkoop van A, B, C is begrend tot respectievelijk 1000,500 en 1500 stks. Bepaal het weekproductieschema om de winst te maximaliseren. Wanneer x_i gelijk stellen aan het aantal uur dat de machine een product maakt ($i = 1, 2, 3$ want er zijn 3 soorten producten. Dan bekomen we de functie:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 4 \cdot x_1 + 25 \cdot 12 \cdot x_2 + 75 \cdot 3 \cdot x_3 &= H \\ 200x_1 + 300x_2 + 225 \cdot x_3 &= H \end{aligned}$$

En de beperkingen worden:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 45 \\ 50x_1 \leq 1000 \\ 25x_2 \leq 500 \\ 75x_3 \leq 1500 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
	200	300	225	0	0	0	0	MAX
x_4	1	1	1	1	0	0	0	45
x_5	50	0	0	0	1	0	0	1000
x_6	0	**25**	0	0	0	1	0	500
x_7	0	0	75	0	0	0	1	1500
	-200	$\mathbf{-300}$	-225	0	0	0	0	0
x_4	1	0	1	1	0	$\frac{-1}{25}$	0	25
x_5	50	0	0	0	1	0	0	1000
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{25}$	0	20
x_7	0	0	**75**	0	0	0	1	1500
	-200	0	$\mathbf{-225}$	0	0	12	0	6000
x_4	**1**	0	0	1	0	$\frac{-1}{25}$	$\frac{-1}{75}$	5
x_5	50	0	0	0	1	0	0	1000
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{25}$	0	20
x_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{75}$	20
	$\mathbf{-200}$	0	0	0	0	12	3	10500
x_1	1	0	0	1	0	$\frac{-1}{25}$	$\frac{-1}{75}$	5
x_5	0	0	0	-50	1	2	$\frac{2}{5}$	750
x_2	0	1	0	0	0	$\frac{1}{25}$	0	20
x_3	0	0	1	0	0	0	$\frac{1}{75}$	20
	0	0	0	200	0	4	$\frac{1}{3}$	11500

Hieruit volgt dus dat de inkomsten maximaal zijn wanneer men 5 uur product 1 maakt, 20 uur product 2 en 20 uur product 3. De inkomsten zullen dan 11500 euro bedragen.

Lijst van figuren

1 Plot van $y = e^x$ en $y = 2x + 3$ 5
2 Plot van $e^x = 2x + 3$ 8
3 Plot van $y = \frac{1}{x}$ en $y = tg(x)$ 11
4 Plot van $x \cdot tg(x) = 1$ 13
5 Plot van $\ln(x)$ en $-(x+1)^3$ 14
6 Plot van $\ln(x) - (x+1)^3 = 0$ 16
7 Plot van $2\sqrt{x}$ en $\cos(\frac{\pi \cdot x}{2})$ 17
8 Plot van $2\sqrt{x} = \cos(\frac{\pi \cdot x}{2})$ 19
9 Plot van $y = x$ en $y = e^{\pi cotg(x)}$ 20
10 Plot van $y = e^{\pi cotg(x)} - x$ 22
11 Plot van $y = \frac{\frac{x^2}{\cos^2(x)} - 2x \cdot tg(x)}{x^4}$ 23
12 Plot van stelsel 7.3 27
13 Plot van de beperkingen van $H = 4x_1 + 7x_2$ 61
14 Plot van de beperkingen van oefening 1 67