Oefeningen Wiskunde(2KA) 2de Kandidatuur Industrieel Ingenieur (Hogeschool Gent)

14 februari 2003

Inhoudsopgave

1 About

De auteur is niet verantwoordelijk voor enige onvolmaaktheden/terkortkomingen in dit document. Gemaakt met emacs in LaTeX onder Debian Linux. Bronnen beschikbaar via www.de-brauwer.be, of na aanvraag via e-mail, meer informatie:
elie@de-brauwer.be.

Deel I
Differentiaalvergelijkingen

2 Herhaling: Integralen

Herhaling:

$$\begin{array}{|rcl|}
\hline
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx & = & Bgsin(\frac{x}{a}) + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+b}}dx & = & \ln|b+\sqrt{x^2+b}| + C \\
\int \frac{1}{x^2+a^2}dx & = & \frac{1}{a}Bgtg\frac{x}{a} + C \\
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx & = & \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \\
\int \sin(x)dx & = & -\cos(x) + C \\
\int \cos(x)dx & = & \sin(x) + C \\
\hline
\int udv & = & uv - \int vdu \\
\hline
\end{array}$$

1. $\int ln(x)dx$

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)dx &= x\ln x - \int \frac{x}{x}dx \\
&= x\ln x - \int dx \\
&= x\ln x - x + C
\end{aligned}$$

   Partiële integratie ($\int udv = uv - \int vdu$) met $dv = dx$ en $v = \ln(x)$.

2. $\int \frac{udu}{(u+1)^2}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{udu}{(u+1)^2} &= \int \frac{(u+1-1)du}{(u+1)^2} \\
&= \int \frac{(u+1)du}{(u+1)^2} - \int \frac{du}{(u+1)^2} \\
&= \ln(u+1) + (u+1)^{-1} + C
\end{aligned}$$

   Ook mogelijk via splitsen in partieelbreuken.

3. $\int \frac{vdv}{v^2+1}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{vdv}{v^2+1} &= \frac{1}{2v}\int \frac{vd(v^2+1)}{v^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(v^2+1) + C
\end{aligned}$$

4. $\int \frac{t-1}{t^2+4}dt$

$$\int \frac{t-1}{t^2+1}dt = \int \frac{tdt}{t^2+4} - \int \frac{dt}{t^2+4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2.2t}\int \frac{2t}{t^2+4}d(t^2+4) - \int \frac{dt}{t^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\ln(t^2+4) - \frac{1}{2}Bgtg\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

5. $\int e^{2y}\sin y dy$

$$\begin{aligned}
\int e^{2y}\sin y dy &= -e^{2y}\cos y + 2\int e^{2y}\cos y dy \\
u = e^{2y} & \\
dv = \sin y & \\
&= -e^{2y}\cos y + 2e^{2y}\sin y - 4\int e^{2y}\sin y dy \\
u = e^{2y} & \\
dv = \cos y & \\
5\int e^{2y}\sin y dy &= -e^{2y}\cos y + 2e^{2y}\sin y + C \\
\int e^{2y}\sin y dy &= \frac{1}{5}(2e^{2y}\sin y - e^{2y}\cos y) + C \\
&= \frac{e^{2y}}{5}(2\sin y - \cos y) + C
\end{aligned}$$

n.z.v., deze oplossing gebruikt tweemaal partiële integratie, ook mogelijk via complexe functies.

6. $\int \frac{2x+3}{x^2-2x-3}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+3}{x^2-2x-3}dx &= \int \frac{2x-2}{(2x-2)(x^2-2x-3)}d(x^2-2x-3) \\
&\quad +5\int \frac{dx}{x^2-2x-3} \\
&= \ln|x^2-2x-3| + 5\int \frac{dx}{(x-1)^2-4} \\
&= \ln|x^2-2x-3| + 5\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-4} \\
&= \ln|x^2-2x-3| + \frac{5}{4}\ln|\frac{x-1-2}{x-1+2}| + C \\
&= \ln|x^2-2x-3| + \frac{5}{4}\ln|\frac{x-3}{x+1}| + C
\end{aligned}$$

Komt niet overeen met de oplossing in de cursus.

7. $\int \frac{t^2 dt}{t^6+6t^3+10}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^2 dt}{t^6+6t3+10} &= \\
x = t^3 & \\
dt = \frac{1}{3}x^{-2/3}dx & \\
&= \int \frac{x^{2/3}\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx}{x^2+6x+10} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+1} \\
&= \frac{1}{3}Bgtg(x+3)+C \\
&= \frac{1}{3}Bgtg(t^3+3)+C
\end{aligned}$$

8. $\int \frac{du}{u(\ln(u)+2)}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u(\ln(u)+2)} &= \int \frac{ud(\ln(u)+2)}{u(\ln(u)+2)} \\
&= \ln(\ln|u|+2)+C
\end{aligned}$$

9. $\int \frac{\sqrt{v}-1}{v\sqrt{v}}dv$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{v}-1}{v\sqrt{v}}dv &= \int \frac{\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}dv - \int \frac{dv}{v^{3/2}} \\
&= \ln v + \frac{2\sqrt{v}}{v} + C
\end{aligned}$$

10. $\int \sin(2x)e^{\sin(x)}dx$

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x e^{\sin(x)}dx &= 2\int \sin(x)\cos(x)e^{\sin(x)}dx \\
&= 2\int \sin(x)e^{\sin(x)}d(\sin(x)) \\
\sin(x) = \lambda & \\
&= 2\int \lambda e^{\lambda}d\lambda \\
u = \lambda & \\
du = e^{\lambda} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\lambda e^{\lambda} - 2\int e^{\lambda} d\lambda \\ &= 2\lambda e^{\lambda} - 2e^{\lambda} + C \\ &= 2e^{\sin(x)}(\sin(x) - 1) + C \end{aligned}$$

11. $\int y^3 e^{y^2} dy$

$$\begin{aligned} \int y^3 e^{y^2} dy &= \int \frac{y^3}{2y} e^{y^2} dy^2 \\ y^2 = \lambda & \\ &= \frac{1}{2}\int \lambda e^{\lambda} d\lambda \\ u = \lambda & \\ du = e^{\lambda} & \\ &= \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda} - \frac{1}{2}\int e^{\lambda} d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda} - \frac{1}{2}e^{\lambda} + C \\ &= \frac{1}{2}e^{\lambda}(\lambda - 1) + C \\ &= \frac{1}{2}e^{y^2}(y^2 - 1) + C \end{aligned}$$

12. $\int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} &= \\ \lambda = \frac{1}{r} & \\ r = \frac{1}{\lambda} & \\ dr = -\frac{1}{\lambda^2} & \\ &= -\int \frac{\lambda d\lambda}{\lambda^2\sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - 1}} \\ &= -\int \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \\ &= -Bgsin(\lambda) + C \\ &= -Bgsin(\frac{1}{r}) + C \end{aligned}$$

En ik heb er geen idee van hoe ze in de cursus tot een Bgtg komen.

13. $\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2+1}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{\sqrt{C_1^2+1}} &= \frac{1}{C_1^2}\int \frac{dy}{\sqrt{y^2+\frac{1}{C_1^2}}} \\ &= \frac{1}{C_1^2}\ln|y+\sqrt{y^2+\frac{1}{C_1^2}}|+C\end{aligned}$$

Hier werd verondersteld dat C_1 een constante is.

14. $\int \frac{1}{x}(\ln|x|+C_1)dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}(\ln|x|+C_1)dx &= \int \frac{\ln|x|}{x}dx + C_1\int \frac{1}{x}dx \\ &= \int \frac{x\ln|x|}{x}d(\ln|x|) + C_1\ln|x| \\ &= \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1\ln|x| + C\end{aligned}$$

Zelfde veronderstelling als hierboven

15. $\int \frac{16}{x^4+2x^3+4x^2-2x-5}dx$ Opsplitsen via Horner ... gewoon veel werk

3 Inleiding

† De orde van de DVG is de orde van de hoogste afgeleide die voorkomt.
† De graad is de exponent van de macht waarmee de hoogste afgeleide voorkomt.
† De algemene oplossing (AO) van een DVG van de n-de orde is een oplossing waarin n integratieconstanten voorkomen.
† Een particuliere oplossing (PO) van een DVG van de n-de orde is een oplossing die minder dan n constanten bevat en een bijzonder geval is van de AO.
† Een singuliere oplossing (SO) is een oplossing die niet uit de AO kan teruggevonden worden door keuze vande integratieconstanten.

1. Bepaal de orde en de graad van de volgende vergelijkingen:
   - $dy + (xy - \cos(x))dx = 0$
     Orde: 1
     Graad: 1
   - $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$
     Orde: 2
     Graad: 1
   - $(y''')^2 + xy'' + 2y(y')^3 + xy = 0$
     Orde: 3
     Graad 2
   - $\frac{d^2v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x(\frac{dv}{dx})^3 + v = 0$
     Orde: 2
     Graad: 1
   - $(\frac{d^3w}{dv^3})^2 - (\frac{d^2w}{dv^2})^4 + vw = 0$
     Orde: 3
     Graad: 2
   - $e^{y'''} - xy'' + y = 0$
     Orde: 3
     Graad: -
   - $y' + x = (y - xy')^{-3}$
     Orde: 1
     Graad: 4
2. Toon aan dat volgende families krommen te schrijven zijn met 1 constante

- $y = x^2 + C_1 + C_2$
  Stel: $C = C_1 + C_2$
- $y = C_1 e^{x+C_2}$

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{x+C_2} \\ &= C_1 e^{C_2} e^x \\ Stel C = C_1 e^{C_2} \\ &= C e^x \end{aligned}$$

- $C_1 + \ln|C_2 x|$

$$\begin{aligned} y &= C_1 + \ln|C_2 x| \\ &= C_1 + \ln|C_2| + \ln|x| \\ Stel C = C_1 + \ln|C_2| \\ &= C + \ln|x| \end{aligned}$$

3. Bepaal de DVG van volgende families krommen

- $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

$$\begin{cases} y &= C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) \\ y' &= -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \\ y'' &= -C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) \end{cases}$$

Uit y en y" volgt dat:

$$\begin{aligned} y &= -y'' \\ y + y'' &= 0 \end{aligned}$$

- $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3$

$$\begin{cases} y &= C_1 e^{2x} + C_2 e^x + C_3 \\ y' &= 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x \\ y'' &= 4C_1 e^{2x} + C_2 e^x \\ y''' &= 8C_1 e^{2x} + C_2 e^x \end{cases}$$

Uit y' volgt dat $2C_1 e^{2x} = y' - C_2 e^x$, we substitueren dit in y":

$$\begin{aligned} y'' &= 2y' - 2C_2 e^x + C_2 e^x \\ C_2 e^x &= 2y' - y'' \end{aligned}$$

Eerst substitueren we $2C_1e^x$ en vereenvoudigen we y"'

$$\begin{aligned} y''' &= 4y' - 4C_2e^x + C_2e^x \\ y''' &= 4y' - 3C_2e^x \\ \text{Substitutie van } C_2e^x & \\ y''' &= 4y' - 3(2y' - y'') \\ y''' &= 4y' - 6y' + 3y'' \\ y''' &= -2y' + 3y'' \\ y''' - 3y'' + 2y' &= 0 \end{aligned}$$

- $y = Cx^2 + C^2$

$$\begin{cases} y &= Cx^2 + C^2 \\ y' &= 2Cx \end{cases}$$

  Uit y' volgt dat $C = \frac{y'}{2x}$, dit substitueren we in y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{y'}{2x}x^2 + \frac{y'^2}{4x^2} \\ y'^2 + 2y'x^3 - 4yx^2 &= 0 \end{aligned}$$

- $y = C_1x^2 + C_2x + C_3$

$$\begin{cases} y &= C_1x^2 + C_2x + C_3 \\ y' &= 2C_1x + C_2 \\ y'' &= 2C_1 \\ y''' &= 0 \end{cases}$$

  3 constanten dus 3 maal afleiden, in de derde afgeleide zijn alle constanten geëlimineerd en de derde afgeleide is eveneens de oplossing. $y''' = 0$

4. Toon aan dat $y = 2x + Ce^x$ de AO is van $y' - y = 2(1 - x)$. Bepaal de PO door $(0, 3)$

$$\begin{aligned} y &= 2x + Ce^x \\ y' &= 2 + Ce^x \end{aligned}$$

   Deze substitueren we in de DVG en we controleren of we geen contradictie bekomen.

$$\begin{aligned} 2 + Ce^x - 2x - Ce^x &= 2(1 - x) \\ 2(1 - x) &= 2(1 - x) \end{aligned}$$

De AO is weldegelijk een AO van deze DVG. We bepalen de PO door $(0,3)$

$$\begin{aligned} 3 &= 0 + C \\ C &= 3 \end{aligned}$$

De PO is dus $y = 2x + 3e^x$.

5. Toon aan dat $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x$ de AO is van $y'' - 3y' + 2y = 2x - 3$.

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{2x} + x \\ y' &= C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1 \\ y'' &= C_1e^x + 4C_2e^{2x} \end{aligned}$$

Deze substitueren we in de DVG en we controleren of we geen contradictie bekomen.

$$\begin{aligned} C_1e^x + 4C_2e^{2x} - 3(C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 1) + 2(C_1e^x + C_2e^{2x} + x) &= 2x - 3 \\ 2x - 3 &= 2x - 3 \end{aligned}$$

Conclusie: de opgegeven AO is weldegelijk een AO van de DVG. Nu bepalen we de PO door $(0,0)$ en $(1,0)$.
Uit $(0,0)$ volgt dat $C_1 + C_2 = 0$
Uit $(1,0)$ volgt dat $C_1e + C_2e^2 + 1 = 0$
Hieruit volgt dat $C_1 = -C_2 = \frac{1}{e^2-e}$. Wanneer we dit substitueren in de AO. Krijgen we $y = x + \frac{1}{e^2-e}(e^x - e^{2x})$ als PO.

6. Toon aan dat $y = C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$ een AO is van $y'' + y = 0$. Bepaal de PO waarvoor $y(0) = 0$ en $y'(0) = 1$.

$$\begin{aligned} y &= C_1\cos x + C_2\sin x \\ y' &= -C_1\sin x + C_2\cos x \\ y'' &= -C_1\cos x - C_2\sin x \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $y'' + y = 0$ Uit y(0)= 0 en y'(0)=1, volgt dat $C_1 = 0$ en $C_2 = 1$ of dat de PO gelijk is aan $y = \sin(x)$

7. Bepaal de DVG van de familie cirkels met straal R en middelpunt op de X-as

$$\begin{aligned} (x-C)^2 + y^2 &= R^2 \\ &\text{Dit afleiden geeft} \\ 2(x-C) + 2yy' &= 0 \\ &\text{Of ook} \end{aligned}$$

$$x - C = -yy'$$

Dit in de eerste vergelijking vervangen

$$\begin{aligned} (yy')^2 + y^2 &= R^2 \\ y^2(1 + y'^2) &= R^2 \end{aligned}$$

En dit is ook de DVG.

8. Bepaal de DVG van de familie cirkels met middelpunt op de X-as

$$\begin{aligned} (x - C_1)^2 + y^2 &= = C_2^2 \\ 2(x - C_1) + 2yy' &= 0 \\ 2 + 2y'^2 + 2yy'' &= 0 \end{aligned}$$

   In deze laatste vergelijking zijn alle constanten reeds verdwenen en deze is dan ook de gevraagde DVG.

9. Bepaal de DVG van alle raaklijnen aan de parabool $y^2 = 2x$

10. Voor elk punt van de kromme K geldt $p+q = 2$, met $(p, 0)$ het snijpunt van de raaklijn met de X-as en $(0, q)$ het snijpunt van de raaklijn met de Y-as. Stel de DVG van de kromme op.

4 Differentiaalvergelijkingen van de 1^{ste} orde en de 1^{ste} graad

Bepaal de AO en indien gevraad de PO van volgende DVG (PO's worden niet bepaald, triviaal)

1. $x^3dx + (y+1)^2dy = 0$

$$\begin{aligned} x^3dx + (y+1)^2dy &= 0 \\ x^3dx &= -(y+1)^2dy \\ \int x^3dx &= -\int (y+1)^2dy \\ \frac{x^4}{4} &= -\frac{(y+1)^3}{3} + C \\ 3x^4 + 4(y+1)^3 &= C \end{aligned}$$

2. $x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy = 0$

$$\begin{aligned} x^2(y+1)dx + y^2(x-1)dy &= 0 \\ \frac{x^2}{x-1}dx &= -\frac{y^2}{y+1}dy \\ \int \frac{(x^2-1)+1}{x-1}dx &= -\int \frac{(y^2-1)+1}{y+1}dy \\ \int (x+1)dx + \int \frac{1}{x-1}dx &= -\int (y-1)dy - \int \frac{1}{y+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2}{2} + \ln|x-1| + \frac{(y-1)^2}{2} + \ln|y+1| &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 + 2\ln|(x-1)(y+1)| &= C \end{aligned}$$

3. $4xdy - ydx = x^2dy$

$$\begin{aligned} 4xdy - ydx &= x^2dy \\ -ydx &= (x^2-4x)dy \\ \frac{dx}{(x^2-4x)} &= -\frac{dy}{y} \\ \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2-4)} &= -\int \frac{dy}{y} \\ \frac{1}{4}\ln|\frac{x-4}{x}| + \ln|C| + \ln|y| &= 0 \\ \ln|\frac{x-4}{x}| + \ln|Cy^4| &= 0 \\ Cy^4(x-4) &= x \end{aligned}$$

4. $y' = \frac{4y}{x(y-3)}$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4y}{x(y-3)} \\ dy &= \frac{4y}{x(y-3)}dx \\ \frac{(y-3)dy}{4y} &= \frac{dx}{x} \\ \int \frac{(y-3)dy}{4y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}\ln|y| &= \ln|x| + C \\ y &= 3\ln|y| + 4\ln|x| + \ln|C| \\ e^y &= Cy^3x^4 \end{aligned}$$

5. $(1+x^3)dy - x^2ydx = 0$

$$\begin{aligned} (1+x^3)dy - x^2ydx &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= \frac{x^2}{1+x^3}dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{3}\int \frac{d(1+x^3)}{1+x^3} \\ 3\ln|y| &= \ln|1+x^3| + \ln|C| \\ Cy^3 &= 1+x^3 \end{aligned}$$

6. $(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$

$$(2x^3+3y)dx + (3x+y-1)dy = 0$$

Controle voorwaarde van Euler

$$* \quad \frac{\partial(2x^3+3y)}{\partial y} = 3$$

$$* \quad \frac{\partial(3x+y-1)dy}{\partial x} = 3$$

Voorwaarde van Euler is voldaan
$\exists F : dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) &= \int (2x^3+3y)dx + K(y) \\ &= \frac{1}{2}x^4 + 3xy + K(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\frac{1}{2}x^4+3xy+K(y))}{\partial y} &= 3x+y-1 = N(xy)\\
0+3x+\frac{dK(y)}{dy} &= 3x+y-1\\
K(y) &= \int (y-1)dy\\
K(y) &= \frac{(y-1)^2}{2}+C
\end{aligned}$$

$$AO: \frac{1}{2}x^4+3xy+\frac{(y-1)^2}{2}=C$$

7. $(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2)dy=0$

$$(y^2e^{xy^2}+4x^3)dx+(2xye^{xy^2}-3y^2dy) \quad = \quad 0$$

Controle voorwaarde van Euler

$$* \quad \frac{\partial(y^2e^{xy^2}+4x^3)}{\partial y} = 2ye^{xy^2}+2xy^2e^{xy^2}$$

$$* \quad \frac{\partial(2xye^{xy^2}-3y^2)}{\partial x} = 2ye^{xy^2}+2xy^2e^{xy^2}$$

Voorwaarde van Euler is voldaan
$\exists F : dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) &= \int (y^2e^{xy^2})dx + K(y)\\
&= e^{xy^2}+x^4+K(y)\\
\frac{\partial(e^{xy^2}+x^4+K(y))}{\partial y} &= 2xye^{xy^2}-3y^2 = N(xy)\\
2xye^{xy^2}+0+\frac{dK(y)}{dy} &= 2xye^{xy^2}-3y^2\\
K(y) &= -3\int y^2dy\\
K(y) &= -y^3+C
\end{aligned}$$

$$AO: e^{xy^2}+x^4-y^3=C$$

8. $x^3+y^2x+x^2=-x^2yy'$

Eerst herleiden naar standaardvorm $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

$$\begin{aligned}
x^3+y^2x+x^2 &= -x^2yy'\\
x^3+y^2x+x^2 &= -x^2y\frac{dy}{dx}\\
(x^3+y^2x+x^2)dx &= (-x^2y)dy\\
(x^3+y^2x+x^2)dx+(x^2y)dy &= 0
\end{aligned}$$

Controle voorwaarde van Euler

$$* \quad \frac{\partial(x^3+y^2x+x^2)}{\partial y} = 2yx$$
$$* \quad \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} = 2yx$$

Voorwaarde van Euler is voldaan.
$\exists F : dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) &= \int (x^3+y^2x+x^2)dx + K(y)\\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + K(y)\\
\frac{\partial(\frac{x^4}{4}+\frac{y^2x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+K(y))}{\partial y} &= x^2y = N(xy)\\
0 + x^2y^2 + 0 + \frac{dK(y)}{dy} &= x^2y^2\\
K(y) &= 0\\
K(y) &= \int 0dy\\
K(y) &= C\\
AO : \frac{x^4}{4} + \frac{y^2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C\\
AO : 3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = C
\end{aligned}$$

9. $(1+y)dx = (1+x)dy$

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{1+x} &= \frac{dy}{1+y}\\
\ln|1+x| &= \ln|1+y| + \ln|C|\\
1+x &= Cy + C\\
x - Cy + 1 &= C
\end{aligned}$$

10. $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})dy = 0$

$$(4x^3y^3 + \frac{1}{x})dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})dy = 0$$

Controle voorwaarde van Euler

$$* \quad \frac{\partial(4x^3y^3+\frac{1}{x})}{\partial y} = 12x^3y^2$$
$$* \quad \frac{\partial(3x^4y^2-\frac{1}{y})dy}{\partial x} = 12x^3y^2$$

Voorwaarde van Euler is voldaan:
$\exists F : dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) &= \int (4x^3y^3 + \frac{1}{x})dx + K(y) \\
&= x^4y^3 + \ln|x| + K(y) \\
\frac{\partial(x^4y^3 + \ln|x| + K(y))}{\partial y} &= 3x^4y^2 - \frac{1}{y} = N(xy) \\
3x^4y^2 + 0 + \frac{dK(y)}{dy} &= 3x^4y^2 - \frac{1}{y} \\
K(y) &= -\int \frac{dy}{y} \\
K(y) &= -\ln|y| + C \\
AO : x^4y^3 + \ln|x| - \ln|y| = C & \\
AO : x^4y^3 + \ln|\frac{x}{y}| = C &
\end{aligned}$$

11. $(x^3 + y^3)dx = 3xy^2dy$

$$\begin{aligned}
(x^3 + y^3)dx &= 3xy^2dy \\
y &= ux \\
dy &= udx + xdu \\
(x^3 + x^3u^3)dx &= 3xu^2x^2(udx + xdu) \\
x^3dx + x^3u^3dx &= 3x^3u^3dx + 3x^4u^2du \\
x^3(1 - 2u^3)dx &= 3u^2x^4du \\
\int \frac{dx}{x} &= \int \frac{3u^2}{1 - 2u^3}du \\
\ln|x| &= -\frac{1}{2}\int \frac{d(1 - 2u^3)}{1 - 2u^3} \\
\ln|x| &= -\frac{1}{2}\ln|1 - 2u^3| - \ln|C| \\
\ln|Cx(1 - 2u^3)^{\frac{1}{2}}| &= 1 \\
Cx^2(1 - 2\frac{y^3}{x^3} &= 1 \\
x^2 - 2\frac{y^3}{x} &= C \\
x^3 - 2y^3 &= Cx
\end{aligned}$$

12. $(1+2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy = 0$

$$
\begin{aligned}
(1+2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy &= 0 \\
\text{Stel} &: \quad u = \frac{x}{y} \\
& \quad x = uy \\
& \quad dx = udy + ydu \\
(1+2e^u)udy + (1+2e^u)ydu &= 2e^u(u-1)dy \\
(1+2e^u y)du &= (2e^u u - 2e^u - u - 2e^u u)dy \\
-\frac{1+2e^u}{u+2e^u}du &= \frac{dy}{y} \\
-\int \frac{d(u+2e^u)}{u+2e^u} &= \int \frac{dy}{y} \\
-\ln|u+2e^u| &= \ln|y| + \ln|C| \\
\frac{1}{u+2e^u} &= Cy \\
uy + 2ye^u &= C \\
x + 2ye^{\frac{x}{y}} &= C
\end{aligned}
$$

13. $xy' = y + \sqrt{x^2-y^2}$

$$
\begin{aligned}
xy' &= y + \sqrt{x^2-y^2} \\
xdy = (y + \sqrt{x^2-y^2})dx & \\
\text{Stel} &: \quad u = \frac{y}{x} \\
& \quad y = ux \\
& \quad dy = udx + xdu \\
x(udx + xdu) &= (ux + x\sqrt{1-u^2})dx \\
xdu &= (\sqrt{1-u^2})dx \\
\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\
\text{Bgsin}(u) &= \ln|x| + C \\
\text{Bgsin}(\frac{y}{x}) &= \ln|x| + C
\end{aligned}
$$

14. $(x\sin(\frac{y}{x}) - y\cos(\frac{y}{x}))dx + x\cos(\frac{y}{x})dy = 0$

$$\begin{aligned}
(x\sin(\frac{y}{x}) - y\cos(\frac{y}{x}))dx + x\cos(\frac{y}{x})dy &= 0 \\
\text{Stel} &: \quad u = \frac{y}{x} \\
& \quad\; y = ux \\
& \quad\; dy = udx + xdu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x\sin(u) - ux\cos(u)dx &= -x\cos(u)(udx + xdu) \\
\cos(u)(udx + xdu) &= (u\cos(u) - \sin(u))dx \\
x\cos(u)du &= (u\cos(u) - \sin(u) - u\cos(u))dx \\
-\frac{\cos(u)}{\sin(u)}du &= \frac{dx}{x} \\
-\ln|\sin(u)| &= \ln|x| + C \\
\frac{1}{\sin(u)} &= Cx \\
x\sin(\frac{y}{x}) &= C
\end{aligned}$$

15. $\cos(y)dx + (1 + e^{-x})\sin(y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
\cos(y)dx + (1 + e^{-x})\sin(y)dy &= 0 \\
\cos(y)dx &= -(1 + e^{-x})\sin(y)dy \\
\frac{e^x}{1 + e^x}dx &= -\frac{\sin(y)}{\cos(y)}dy \\
\ln|1 + e^x| &= \ln|\cos(y)| + C \\
1 + e^x &= C\cos(y)
\end{aligned}$$

16. $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$

$$\begin{aligned}
(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy &= 0 \\
y' &= \frac{2x - 5y + 3}{2x + 4y - 6}
\end{aligned}$$

We zoeken een subsitutie zodat de constanten 3 en -6 wegvallen.

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2X-5Y}{2X+4Y} \\
(2X+4Y)dy &= (2X-5Y)dx \\
\text{Stel} &: Y = uX \\
& dY = udX + Xdu \\
(2X+4uX)(udX+Xdu) &= (2X-5uX)dx \\
(2+4u)(udX+Xdu) &= (2-5u)dX \\
(2+4u)Xdu &= (2-5u-2u-4u^2)dX \\
\frac{2+4u}{2-7u-4u^2}du &= \frac{dX}{X} \\
\int \frac{dX}{X} &= \int \frac{2+4u}{-4u^2-7u+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} d(4u^2-7+4) = 8u-7 \\ 4u+2 = \alpha(8u+7)+\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-\ln|X| &= \frac{1}{2}\ln|4u^2+7u-2| - \frac{3}{2}\int \frac{du}{4u^2+7u-2} \\
-2\ln|X| &= \ln|4u^2+7u-2| - \frac{3}{2}\int \frac{d(2u+\frac{7}{4})}{(2u+\frac{7}{4})^2-(\frac{9}{4})^2} \\
-2\ln|CX| &= \ln|4u^2+7u-2| - \frac{1}{3}\ln|\frac{2u+\frac{7}{4}-\frac{9}{4}}{2u+\frac{7}{4}+\frac{9}{4}}| \\
-2\ln|CX| &= \ln|4u^2+7u-2| - \frac{1}{3}\ln|\frac{2u-\frac{1}{2}}{2u+4}|
\end{aligned}$$

Substituties terug doorlopen.

17. $(x+y)dx + (3x+3y-4)dy = 0$

$$\begin{aligned}
(x+y)dx + (3x+3y-4)dy &= 0 \\
\text{Stel} &: z = x+y \\
& dx = dz - dy \\
z(dz-dy) + (3z-4)dy &= 0 \\
zdz &= (4-3z+z)dy \\
-\frac{1}{2}\int \frac{zdz}{z-2} &= \int dy \\
-\frac{1}{2}(z - 2\ln|z-2|) &= y + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-z-2\ln|z-2| &= 2y+C\\
-x-y-2\ln|x+y-2| &= 2y+C\\
C &= 3y+x+2\ln|x+y-2|
\end{aligned}$$

De oplossing uit de nota's kan bekomen worden door -1 uit de ln te halen en in de constante te brengen.

18. $(x^2-1)(cotg(y))y' = 1$

$$\begin{aligned}
(x^2-1)(cotg(y))y' &= 1\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{tg(y)}{(x^2-1)}\\
cotg(y)dy &= \frac{dx}{x^2-1}\\
\int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy &= \frac{1}{2}\ln|\frac{x-1}{x+1}|\\
\ln|\sin(y)| &= \frac{1}{2}\ln|C\frac{x-1}{x+1}|\\
\sin^2(y) &= C\frac{x-1}{x+1}
\end{aligned}$$

19. $(x+y-1)^2dy = 2(y+2)^2dx$

$$(x+y-1)^2dy = 2(y+2)^2dx$$

We zoeken een subsitutie zodat de constanten -1 en +2 wegvallen.

$$\begin{cases} x = X+3\\ y = Y-2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(X+Y)^2dy &= 2Y^2dx\\
\text{Stel} &: X = uY\\
& u = \frac{X}{Y}\\
& dX = udY + Ydu\\
Y^(2)(u+1)^2dY &= 2Y^2(udY+Ydu)\\
(u+1)^2dY &= 2(udY+Ydu)\\
(u^2+2u-2u+1)dY &= 2Ydu\\
\int\frac{dY}{2Y} &= \int\frac{du}{u^2+1}\\
\ln|Y| &= 2Bgtg(u)+C\\
\ln|y+2| &= 2Bgtg(\frac{x-3}{y+2})+C
\end{aligned}$$

20. $cotg(\theta)dr + rd\theta = 0$

$$\begin{aligned}
cotg(\theta)dr + rd\theta &= 0 \\
cotg(\theta)dr &= -rd\theta \\
-\frac{dr}{r} &= \frac{d\theta}{cotg(\theta)} \\
-\int \frac{dr}{r} &= \int \frac{\sin\theta d\theta}{\cos\theta} \\
\ln|r| &= \ln|C\cos\theta| \\
r &= C\cos\theta
\end{aligned}$$

21. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

$$\begin{aligned}
(x^2 - y^2)y' &= 2xy \\
\text{Stel} &: x = uy \\
& u = \frac{x}{y} \\
& dx = udy + ydu \\
(u^2y^2 - y^2)dy &= 2uy^2(udy + ydu) \\
(u^2 - 1)dy &= 2u(udy + ydu) \\
(u^2 - 1 - 2u^2)dy &= 2uydu \\
-\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2udu}{u^2+1} \\
-\ln|y| &= \ln|u^2+1| + C \\
\frac{C}{y} &= (u^2+1) \\
\frac{C}{y} &= ((\frac{x}{y})^2 + 1) \\
Cy &= x^2 + y^2
\end{aligned}$$

22. $y' + 2xy = 4x$

$$\begin{aligned}
y' + 2xy &= 4x \\
\text{Lineair in y en y'} & \\
\text{Stel} &: y = uv \\
u'v + uv' + 2xuv &= 4x \\
\text{Nu moet uv' + 2xuv = 0} & \\
\frac{dv}{dx} &= -2xv \\
\int \frac{dv}{v} &= -\int 2xdx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|v| &= -x^2\\
v &= e^{-x^2}\\
\frac{du}{dx} - e^{x^2} &= 4x\\
\int du &= \int 4xe^{x^2}dx\\
u &= 2e^{x^2} + C\\
y &= uv\\
y &= e^{-x^2}(2e^{x^2} + C)\\
y &= 2 + Ce^{-x^2}
\end{aligned}$$

23. $xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x$

$$\begin{aligned}
xy' &= y + x^3 + 3x^2 - 2x\\
y' - \frac{1}{x}y &= x^2 + 3x - 2\\
\text{Stel} &: y = uv\\
v'u + vu' - \frac{uv}{x} &= x^2 + 3x - 2 \,*\\
\text{Bepaal u zodat : } v\frac{du}{dx} &= \frac{uv}{x}\\
\ln|u| &= \ln|x| + C(= 0)\\
u &= x\\
\text{Substitueren in } * & \\
x\frac{dv}{dx} &= x^2 + 3x - 2\\
dv &= (x + 3 - \frac{2}{x}))dx\\
v &= \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x| + C\\
y &= uv\\
y &= \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x| + xC
\end{aligned}$$

24. $(x-2)y' = y + 2(x-2)^3$

$$\begin{aligned}
(x-2)y' &= y + 2(x-2)^3\\
y' - \frac{1}{x-2}y &= 2(x-2)^2\\
\text{Stel} &: y = uv\\
v'u + vu' - \frac{uv}{x-2} &= 2(x-2)^2 \,*\\
\text{Bepaal u zodat : } v\frac{du}{dx} &= \frac{uv}{x-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln|u| &= \ln|x-2| + C(=0)\\
u &= x-2\\
\text{Substitueren in } * & \\
(x-2)\frac{dv}{dx} &= 2(x-2)^2\\
\int dv &= \int 2(x-2)dx\\
v &= (x-2)^2 + C\\
y &= uv\\
y &= (x-2)^3 + (x-2)C
\end{aligned}$$

25. $y' + ycotg(x) = 5e^{\cos(x)}$

$$\begin{aligned}
y' + ycotg(x) &= 5e^{\cos(x)}\\
\text{Stel} &: y = uv\\
v'u + vu' + cotg(x)y &= 5e^{\cos(x)} *\\
\text{Bepaal u zodat} : v\frac{du}{dx} &= -cotg(x)uv\\
\int \frac{du}{u} &= -\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx\\
\ln|u| &= -\ln|\sin(x)| + C(=0)\\
u &= \frac{1}{\sin(x)}\\
\text{Substitueren in } * & \\
\frac{1}{\sin(x)}\frac{dv}{dx} &= 5e^{\cos(x)}\\
\int dv &= \int 5\sin(x)e^{\cos(x)}dx\\
v &= -5e^{\cos(x)} + C\\
y &= \frac{C - 5e^{\cos(x)}}{\sin(x)}\\
y\sin(x) + 5e^{\cos(x)} &= C
\end{aligned}$$

26. $y\ln y dx + (x - \ln y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
y\ln y dx + (x-\ln y)dy &= 0\\
\frac{y\ln(y)}{\ln(y) - x} &= \frac{dy}{dx}\\
\frac{1}{y} - \frac{x}{y\ln(y)} &= x'\\
x' + \frac{x}{y\ln(y)} &= \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Stel} &: x = uv \\
vu' + uv' + \frac{1}{y\ln(y)}uv &= \frac{1}{y} * \\
\text{We bepalen v zodat} &: \frac{dv}{dy} = -v\frac{1}{y\ln(y)} \\
\int \frac{dv}{v} &= -\int \frac{1}{y\ln(y)}dy \\
\int \frac{dv}{v} &= -\int \frac{d(\ln(y))}{\ln(y)} \\
\ln|v| &= -\ln|\ln|y|| + C(=0) \\
v &= \frac{1}{\ln|y|} \\
\text{Substitueren in } * & \\
\frac{1}{\ln|y|}u' &= \frac{1}{y} \\
\int du &= \int \frac{\ln|y|dy}{y} \\
u &= \frac{1}{2}\ln^2|y| + C \\
x &= uv \\
x &= \frac{1}{2}\ln|y| + \frac{C}{\ln|y|} \\
2x\ln|y| &= \ln^2|y| + C
\end{aligned}$$

27. $x^3y' + (2-3x^2)y = x^3$

$$\begin{aligned}
x^3y' + (2-3x^2)y &= x^3 \\
y' + \frac{(2-3x^2)}{x^3}y &= 1 \\
\text{Stel} &: y = uv \\
v'u + vu' + \frac{(2-3x^2)}{x^3}uv &= 1 * \\
\text{Bepaal u zodat} : \frac{du}{dx} &= -u\frac{(2-3x^2)}{x^3} \\
\int \frac{du}{u} &= \int \frac{3x^2}{x^3}dx - \int \frac{2}{x^3}dx \\
\ln|u| &= 3\ln|x| + \frac{1}{x^2} + C(=0) \\
\ln|u| &= \ln|x^3e^{\frac{1}{x^2}}| \\
u &= x^3e^{\frac{1}{x^2}} \\
\text{Substitueren in } * & \\
x^3e^{\frac{1}{x^2}}\frac{dv}{dx} &= 1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int dv &= \int \frac{dx}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}} \\
v &= \frac{1}{2}\int \frac{x^3 d(-\frac{1}{x^2})}{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}} \\
v &= \frac{1}{2e^{\frac{1}{x^2}}} + C \\
y &= uv \\
y &= \frac{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}{2e^{\frac{1}{x^2}}} + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}} \\
2y &= x^3 + Cx^3 e^{\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}
$$

28. $y' - y = xy^5$

$$
\begin{aligned}
y' - y &= xy^5 \\
\text{Bernoulli herleiden} & \\
\frac{y'}{y^5} - y^{-4} &= x* \\
\text{Stel} &: z = y^{-4} \\
& \quad z' = -4\frac{y'}{y^5} \\
\text{* = -4*} & \\
-4\frac{y'}{y^4} + 4y^{-4} &= -4x \\
z' + 4z &= -4x \\
\text{Lineair in z en z'} & \\
\text{Stel} &: z = uv \\
uv' + vu' + 4uv &= -4x** \\
\text{Bepaal u zodat} : \frac{du}{dx} &= -4u \\
\ln|u| &= -4x + C(=0) \\
u &= e^{-4x} \\
\text{Substitueren in **} & \\
e^{-4x}\frac{dv}{dx} &= -4x \\
\int dv &= -4\int xe^{4x}dx \\
v &= -xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C \\
z &= uv \\
z &= e^{-4x}(-xe^{4x} + \frac{1}{4}e^{4x} + C)
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

29. $y' + 2xy + xy^4 = 0$

$$\begin{aligned}
y' + 2xy + xy^4 &= 0 \\
\frac{y'}{y^4} + 2xy^{-3} &= -x * \\
\text{Bernoulli, herleiden tot lineair in y en y'} & \\
\text{Stel} &: z = y^{-3} \\
& z' = -3y^{-4}y' \\
\text{* = -3*} & \\
-3\frac{y'}{y^4} - 6xy^{-3} &= 3x \\
z' - 6xz &= 3x \\
\text{Lineair in z en z'} & \\
\text{Stel} &: z = uv \\
uv' + u'v - 6xuv &= 3x ** \\
\text{Bepaal u zodat : } \frac{du}{dx} &= 6xu \\
\int \frac{du}{u} &= \int 6xdx \\
u &= e^{3x^2} \\
\text{Substitueren in **} & \\
e^{3x^2}\frac{dv}{dx} &= 3x \\
\int dv &= \int \frac{3xdx}{e^{3x^2}} \\
v &= -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C \\
z &= uv \\
z &= -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2} \\
\frac{1}{y^3} &= -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}
\end{aligned}$$

30. $(\frac{x}{y} - x^3\cos(y))y' = 2$

$$\begin{aligned}
(\frac{x}{y} - x^3\cos(y))y' &= 2 \\
\frac{x}{2y} - \frac{x^3\cos(y)}{2} &= x' \\
x' - \frac{x}{2y} &= -\frac{x^3\cos(y)}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{x'}{x^3} - \frac{x^{-2}}{2y} &= -\frac{\cos(y)}{2} * \\
\text{Stel} &: z = x^{-2} \\
& \quad z' = -2x^{-3}x' \\
* = \text{-2*} & \\
-2\frac{x'}{x^3} + \frac{x^{-2}}{y} &= \cos(y) \\
z' + \frac{z}{y} &= \cos(y) \\
\text{Stel} &: z = uv \\
u'v + uv' + \frac{uv}{y} &= \cos(y) ** \\
\text{Bepaal v zodat} : \frac{dv}{dy} &= -\frac{v}{y} \\
\ln|v| &= -\ln|y| + C(=0) \\
v &= \frac{1}{y} \\
\text{Substitueren in **} & \\
\frac{du}{ydy} &= \cos(y) \\
\int du &= \int \cos(y) y dy \\
u &= y\sin(y) + \cos(y) + C \\
z &= uv \\
z &= \frac{1}{y}(y\sin(y) + \cos(y) + C) \\
\frac{y}{x^2} &= y\sin(y) + \cos(y) + C
\end{aligned}
$$

31. $yy' - xy^2 + x = 0$

$$
\begin{aligned}
yy' - xy^2 + x &= 0 \\
y' &= \frac{x(y^2-1)}{y} \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x(y^2-1)}{y} \\
\int \frac{ydy}{y^2-1} &= \int xdx \\
\frac{1}{2}\ln|y^2-1| &= \frac{1}{2}x^2 + C \\
y^2 - 1 &= Ce^{x^2} \\
y^2 &= 1 + Ce^{x^2}
\end{aligned}
$$

32. $xyy' = (y+1)(1-x)$

$$\begin{aligned}
xyy' &= (y+1)(1-x) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{(y+1)(1-x)}{xy} \\
\int \frac{ydy}{y+1} &= \int \frac{1-x}{x}dx \\
y - \ln|y+1| &= \ln|x| - x + C \\
y + x &= \ln|Cx(y+1)|
\end{aligned}$$

33. $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$

$$\begin{aligned}
ydx + (xy + x - 3y)dy &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-y}{xy + x - 3y} \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{xy + x - 3y}{-y} \\
\frac{dx}{dy} &= 3 - \frac{xy + x}{y} \\
\frac{dx}{dy} + \frac{(y+1)x}{y} &= 3 \\
\text{Stel} &: x = uv \\
u'v + uv' + \frac{y+1}{y}uv &= 3\,* \\
\text{Bepaal v zodat } \frac{dv}{dy} &= -\frac{y+1}{y}v \\
\int \frac{dv}{v} &= -\int \frac{y+1}{y}dy \\
\ln|v| &= -y - \ln|y| + C(=0) \\
v &= \frac{e^{-y}}{y} \\
\text{Substitueren in } * & \\
\frac{e^{-y}}{y}\frac{du}{dy} &= 3 \\
\int du &= \int 3ye^{y}dy \\
u &= 3ye^{y} - 3\int e^{y}dy \\
u &= 3ye^{y} - 3e^{y} + C \\
x &= uv \\
x &= \frac{e^{-y}}{y} * (3ye^{y} - 3e^{y} + C) \\
xy &= 3(y-1) + Ce^{-y}
\end{aligned}$$

34. $(1+e^{2\theta})dr + 2re^{2\theta}d\theta = 0$

$$\begin{aligned}
(1+e^{2\theta})dr + 2re^{2\theta}d\theta &= 0 \\
(1+e^{2\theta})dr &= -2re^{2\theta}d\theta \\
\int \frac{dr}{r} &= -2\int \frac{e^{2\theta}}{1+e^{2\theta}}d\theta \\
\ln|r| &= -\ln|1+e^{2\theta}| + C \\
r(1+e^{2\theta}) &= C
\end{aligned}$$

35. $(x+2y+1)dx - (2x-3)dy = 0$

$$\begin{aligned}
(x+2y+1)dx - (2x-3)dy &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x+2y+1}{2x-3}
\end{aligned}$$

We zoeken een subsitutie zodat de constanten wegvallen.

$$\begin{cases} x = X + \frac{3}{2} \\ y = Y - \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dX} &= \frac{X+2Y}{2X} \\
\text{Stel} &: Y = uX \\
& u = \frac{Y}{X} \\
& dY = udX + Xdu \\
\frac{udX + Xdu}{dX} &= \frac{X+2uX}{2X} \\
u + X\frac{du}{dX} &= \frac{1}{2} + u \\
X\frac{du}{dX} &= \frac{1}{2} \\
\int du &= \frac{1}{2}\int \frac{dX}{X} \\
u &= \frac{1}{2}\ln|X| + C \\
\frac{Y}{X} &= \frac{1}{2}\ln|X| + C \\
\frac{y+\frac{5}{4}}{x-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2}\ln|x-\frac{3}{2}| + C
\end{aligned}$$

36. $xydx = (x^2 - y^4)dy$

$$
\begin{aligned}
xydx &= (x^2 - y^4)dy \\
\frac{xy}{x^2 - y^4} &= \frac{dy}{dx} \\
\frac{x^2 - y^4}{xy} &= x' \\
\frac{x}{y} - \frac{y^3}{x} &= x' \\
x' - \frac{x}{y} &= -\frac{y^3}{x} \\
xx' - \frac{x^2}{y} &= -y^3 * \\
\text{Stel} &: z = x^2 \\
& z' = 2xx' \\
\!=\!2 & \\
2xx' - 2\frac{x^2}{y} &= -2y^3 \\
z' - 2\frac{z}{y} &= -2y^3 \\
\text{Stel} &: z = uv \\
uv' + vu' - 2\frac{uv}{y} &= -2y^3 ** \\
\text{We bepalen u zodat } \frac{du}{dy} &= 2\frac{u}{y} \\
\int \frac{du}{u} &= 2\int \frac{dy}{y} \\
u &= y^2 \\
\text{Substitueren in } ** & \\
y^2\frac{dv}{dy} &= -2y^3 \\
\int dv &= -2\int ydy \\
v &= -y^2 + C \\
z &= uv \\
z &= y^2(-y^2 + C) \\
x^2 &= -y^4 + Cy^2 \\
x^2 + y^4 &= Cy^2
\end{aligned}
$$

37. $2xy' = 2y + \sqrt{x^2+4y^2}$

$$\begin{aligned}
2xy' &= 2y + \sqrt{x^2+4y^2} \\
2xdy &= (2y + \sqrt{x^2+4y^2})dx \\
\text{Stel} &: y = ux \\
dy &= udx + xdu \\
2x(udx+xdu) &= (2ux + x\sqrt{1+4u^2})dx \\
2(udx+xdu) &= (2u + \sqrt{1+4u^2})dx \\
2xdu &= (2u - 2u + \sqrt{1+4u^2})dx \\
2\int \frac{du}{\sqrt{1+4u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\
\frac{2}{2}\int \frac{d2u}{\sqrt{1+4u^2}} &= \ln|Cx| \\
\ln|2u + \sqrt{1+4u^2}| &= \ln|Cx| \\
2u + \sqrt{1+4u^2} &= Cx \\
2\frac{y}{x} + \sqrt{1+4\frac{y^2}{x^2}} &= Cx \\
2y + \sqrt{x^2+4y^2} &= Cx^2 \\
x^2+4y^2 &= C^2x^4 - 4yCx^2 + 4y^2 \\
1 &= C^2x^2 - 4Cy \\
1+4Cy &= C^2x^2
\end{aligned}$$

38. $2x\cos^2(y)dx + (2y - x^2\sin(2y))dy = 0$

$$\begin{aligned}
2x\cos^2(y)dx + (2y - x^2\sin(2y))dy &= 0 \\
2x\cos^2(y)dx + (2y - 2x^2\sin(y)\cos(y))dy &= 0 \\
x\cos^2(y)dx + (y - x^2\sin(y)\cos(y))dy &= 0
\end{aligned}$$

Controle voorwaarde van Euler

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x\cos^2(y))}{\partial y} &= -2x\cos(y)\sin(y) \\
\frac{\partial(y - x^2\sin(y)\cos(y))}{\partial x} &= -2x\sin(y)\cos(y)
\end{aligned}$$

Voorwaarde van Euler is voldaan

$$\begin{aligned}
\exists F : dF(x,y) &= M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \\
\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) &= \int (x\cos^2(y))dx + K(y) \\
&= \frac{1}{2}x^2\cos^2(y) + K(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\frac{1}{2}x^2\cos^2(y)+K(y))}{\partial y} &= y - x^2\sin(y)\cos(y) = N(xy) \\
-x^2\sin(y)\cos(y) + \frac{d(K(y))}{dy} &= y - x^2\sin(y)\cos(y) \\
K(y) &= \int y dy \\
K(y) &= \frac{y^2}{2} + C \\
AO: \frac{1}{2}x^2\cos^2(y) + \frac{y^2}{2} + C & \\
AO: x^2\cos^2(y) + y^2 + C &
\end{aligned}$$

5 Differentiaalvergelijking van de 1ste orde, niet van de 1ste graad

Bepaal AO en SO van volgende DVG, tenzij anders vermeld

1. $y'^2 = xy' + y' - y$

$$\begin{array}{rcl}
y'^2 & = & xy' + y' - y \\
y & = & xy' + y' - y'^2 \\
\text{Stel} & : & y' = p \\
y & = & xp + p - p^2(*) \\
\text{Afleiden naar x} & & \\
\dfrac{dy}{dx} & = & p + (x + 1 - 2p)\dfrac{dp}{dx} \\
p & = & p + (x + 1 - 2p)p' \\
\text{I:}x + 1 & = & 2p \\
\dfrac{x+1}{2} & = & p \\
\text{Substitueren in (*)} & & \\
y & = & x\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x+1}{2} - (\dfrac{x+1}{2})^2 \\
y & = & \dfrac{x+1}{2}(x+1) - (\dfrac{x+1}{2})^2 \\
y & = & \dfrac{(x+1)^2}{2} - \dfrac{(x+1)^2}{4} \\
\text{SO:}4y & = & (x+1)^2 \\
\text{II:}p' & = & 0 \\
p & = & C \\
\text{Substitueren in (*)} & & \\
\text{AO:}y & = & Cx + C - C^2
\end{array}$$

2. $y' = 1 + ye^{-y'}$

$$\begin{array}{rcl}
y' & = & 1 + ye^{-y'} \\
y' - 1 & = & ye^{-y'} \\
\dfrac{y'-1}{e^{-y'}} & = & y \\
(y' - 1)e^{y'} & = & y \\
\text{Stel} & : & y' = p \\
(p - 1)e^p & = & y(*) \\
\text{Afleiden naar x} & &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= 0 + e^p + (p-1)e^p\frac{dp}{dx} \\
p &= (1-1+p)e^p p' \\
p &= pe^p p' \\
\text{I:}p &= 0 \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
\text{SO:}y &= -1 \\
\text{II:}e^p p' &= 1 \\
e^p &= x + C \\
p &= \ln|x+C| \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
(\ln|x+C|-1)e^{\ln|x+C|} &= y \\
\text{AO:}(\ln|x+C|-1)(x+C) &= y
\end{aligned}$$

3. $y = 2xy' - yy'^2$ Deze vergelijking is zowel oplosbaar naar x,y, als y'. Het is niet aan te raden deze op te lossen naar y' want dan krijg je een vierkantsvergelijking wat een moeilijke DVG geeft.

$$\begin{aligned}
y &= 2xy' - yy'^2 \\
2x &= \frac{y}{y'} + yy' \\
\text{Stel} &: y' = p \\
2x &= \frac{y}{p} + yp(*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
2\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{p} + p + (y - \frac{y}{p^2})\frac{dp}{dy} \\
\frac{2}{p} &= \frac{1}{p} + p + (y - \frac{y}{p^2})p' \\
\frac{1}{p} - p &= (y - \frac{y}{p^2})p' \\
\frac{1}{p} - p &= -\frac{y}{p}(\frac{1}{p} - p)p' \\
\text{I:}\frac{1}{p} - p &= 0 \\
\frac{1}{p} &= p \\
1 &= p^2 \\
\text{p=1 en p=-1 in (*)} & \\
\text{SO:}x^2 &= y^2 \\
\text{II:} -\frac{y}{p}p' &= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{p} &= -\frac{dy}{y} \\
\ln|p| &= -\frac{|}{C}y| \\
p &= \frac{1}{Cy}
\end{aligned}$$

Substitueren in (*)

$$\begin{aligned}
2x &= Cy^2 + \frac{1}{C} \\
\text{AO:}2Cx &= C^2y^2 + 1
\end{aligned}$$

4. $(3y-1)^2y'^2 = 4y$

$$\begin{aligned}
(3y-1)^2y'^2 &= 4y \\
y' &= \pm 2\frac{\sqrt{y}}{3y-1} \\
\frac{dy}{dx} &= \pm 2\frac{\sqrt{y}}{3y-1} \\
\int \frac{3y-1}{\sqrt{y}}dy &= \pm 2\int dx(*) \\
\int 3\sqrt{y}dy - \int y^{-\frac{1}{2}}dy &= \pm 2\int dx \\
2y^{\frac{3}{2}} + 2y^{\frac{1}{2}} &= \pm x + C \\
y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \pm x + C & \\
\text{AO:}\sqrt{y}(y+1) &= \pm(x+C)
\end{aligned}$$

De singuliere oplossing y=0, werd in de stap (*) weggedeeld door te veronderstellen dat $y \neq 0$, maar $y = 0$ is weldegelijk een oplossing, die niet volgt uit de AO door aanpassing van de constanten dus y=0 is de SO.

5. $xy' = y + \frac{1}{y'}$

$$\begin{aligned}
xy' &= y + \frac{1}{y'} \\
y &= xy' - \frac{1}{y'} \\
\text{Stel} &: y' = p \\
y &= xp - \frac{1}{p}(*)
\end{aligned}$$

Afleiden naar x

$$\frac{dy}{dx} = p + (x + \frac{1}{p^2})p'$$

$$
\begin{aligned}
p &= p + (x + \frac{1}{p^2})p' \\
\text{I:}x + \frac{1}{p^2} &= 0 \\
x &= -\frac{1}{p^2} \\
p^2 &= -\frac{1}{x} \\
\text{Substitueren in } (*)^2 & \\
y^2 &= -\frac{1}{x}x^2 - 2x - x \\
\text{SO:}y^2 &= -4x \\
\text{II:}p' &= 0 \\
p &= C \\
\text{Substitueren in } (*) & \\
y &= xC - \frac{1}{C}
\end{aligned}
$$

6. $xy' - y = y' - \ln y'$

$$
\begin{aligned}
xy' - y &= y' - \ln y' \\
y &= xy' - \ln y' \\
\text{Stel} &: y' = p \\
y &= xp - p \ln p (*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
\frac{dy}{dx} &= p + (x - \ln(p) - 1)\frac{dp}{dx} \\
p &= p + (x - \ln(p) - 1)p' \\
\text{I:}p' &= 0 \\
p &= C \\
\text{Substitueren in } (*) & \\
\text{AO:}y &= Cx - C\ln(C) \\
\text{II:}x - \ln(p) - 1 &= 0 \\
\ln(p) &= x - 1 \\
e^{x-1} &= p \\
\text{Substitueren in } (*) & \\
y &= xe^{x-1} - e^{x-1}\ln(e^{x-1}) \\
y &= (x - (x-1))e^{x-1} \\
y &= e^{x-1} \\
\text{SO: } \ln(y) &= x - 1
\end{aligned}
$$

7. $\cos(y') = y - xy'$

$$\begin{aligned}
\cos(y') &= y - xy' \\
y &= \cos(y') + xy' \\
\text{Stel:}y' &= p \\
y &= \cos(p) + xp(*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
\frac{dy}{dx} &= p + (x - \sin(p))\frac{dp}{dx} \\
p &= p + (x - \sin(p))p' \\
\text{I:}p' &= 0 \\
p &= C \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
\text{AO:}y &= \cos(C) + Cx \\
\text{II:} \sin(p) &= x \\
p &= Bgsin(x) \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
y &= = \cos(Bgsin(x)) + xBgsin(x) \\
y &= xBgsin(x) \pm \sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$

8. $6y^2y'^2 = y - 3y'x$

$$\begin{aligned}
6y^2y'^2 &= y - 3y'x \\
x &= \frac{y - 6y^2y'^2}{3y'} \\
x &= \frac{y}{3y'} - 2y^2y' \\
\text{Stel:}y' &= p \\
x &= \frac{y}{3p} - 2y^2p(*) \\
\text{Afleiden naar y} & \\
\frac{dx}{dy} &= (\frac{1}{3p} - 4yp) + (-\frac{y}{3p^2} - 2y^2)p' \\
\frac{1}{p} &= (\frac{1}{3p} - 4yp) + (-\frac{y}{3p^2} - 2y^2)p' \\
\frac{2}{3p} + 4yp &= -\frac{y}{p}(\frac{1}{3p} + 2yp)p' \\
\frac{1}{3p} + 2yp &= -\frac{y}{2p}(\frac{1}{3p} + 2yp)p' \\
\text{I:}\frac{1}{3p} &= -2yp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{-6y} &= p^2 \\
\text{Substitueren in } (*)^2 & \\
x^2 &= \frac{y^2}{9p^2} - \frac{4}{3}y^3 + 4y^4p^2 \\
x^2 &= -\frac{6y^3}{9} - \frac{4}{3}y^3 - \frac{4y^3}{6} \\
x^2 &= -\frac{8}{3}y^3 \\
\text{SO:}3x^2 + 8y^3 &= 0 \\
\text{II:} -\frac{y}{2p}p' &= 1 \\
\frac{dp}{p} &= -2\frac{dy}{y} \\
\ln|p| &= -2\ln|Cy| \\
p &= \frac{1}{Cy^2} \\
\text{Substitueren in } (*) & \\
x &= \frac{y^3C}{3} - \frac{2}{C} \\
\text{AO:}3x &= Cy^3 - \frac{6}{C}
\end{aligned}$$

9. Bepaal PO door $(0, -e)$ en SO van $y' = \ln(xy' - y)$

$$\begin{aligned}
y' &= \ln(xy' - y) \\
e^{y'} &= xy' - y \\
y &= xy' - e^{y'} \\
\text{Stel:}p &= y' \\
y &= xp - e^p(*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
p &= p + (x - e^p)p' \\
\text{I:}p' &= 0 \\
p &= C \\
\text{Substitueren in } (*) & \\
\text{AO:}y &= xC - e^C \\
\text{Door } (0, -e) \text{ geeft C=1} & \\
\text{PO:}y &= x - e \\
\text{II:}x - e^p &= 0 \\
x &= e^p \\
\ln|x| &= p
\end{aligned}$$

Substitueren in (*)

$$\begin{aligned} y &= x\ln|x| - e^{\ln|x|} \\ \text{SO:}y &= x\ln|x| - x \end{aligned}$$

10. $(x^2-4)y'^2 = 2xyy' + x^2$

$$\begin{aligned} (x^2-4)y'^2 &= 2xyy' + x^2 \\ 2xyy' &= x^2y'^2 - 4y'^2 - x^2 \\ 2y &= xy' - \frac{4y'}{x} - \frac{x}{y'} \\ \text{Stel:}p = y' & \\ 2y &= xp - \frac{4p}{x} - \frac{x}{p} \end{aligned}$$

Deze vergelijking is equivalent met:

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{(x^2-4)p^2 - x^2}{xp}(*) \\ \text{Afleiden naar x} & \\ 2p &= (p + \frac{4p}{x^2} - \frac{1}{p}) + (x - \frac{4}{x} + \frac{x}{p^2})p' \\ (p - \frac{4p}{x^2} + \frac{1}{p}) &= (x - \frac{4}{x} + \frac{x}{p^2})p' \\ (p - \frac{4p}{x^2} + \frac{1}{p}) &= \frac{x}{p}(p - \frac{4p}{x^2} + \frac{1}{p})p' \\ \text{I:}p - \frac{4p}{x^2} + \frac{1}{p} &= 0 \\ p^2x^2 - 4p^2 + x^2 &= 0 \\ p^2(x^2-4) &= -x^2 \\ p^2 &= \frac{x^2}{4-x^2} \\ \text{Substitueren in *} & \\ \frac{(x^2-4)\frac{-x^2}{x^2-4} - x^2}{x\frac{x}{\pm\sqrt{4-x^2}}} &= 2y \\ \frac{-x^2}{\frac{x^2}{\pm\sqrt{4-x^2}}} &= y \\ \pm\sqrt{4-x^2} &= y \\ 4-x^2 &= y^2 \\ \text{SO:}y^2 + x^2 &= 4 \\ \text{II:}\frac{x}{p}p' &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dp}{p} &= \int \frac{dx}{x} \\
p &= Cx \\
\text{Substitueren in *} & \\
2y &= \frac{(x^2-4)C^2x^2 - x^2}{x^2C} \\
2yC &= (x^2-4)C^2 - 1 \\
\text{AO:}2yC+1 &= (x^2-4)C^2
\end{aligned}$$

11. Bepaal PO door $(0,-2)$ van $xy'^3 - 2yy'^2 - 16x^2 = 0$

$$\begin{aligned}
xy' - 2yy'^2 - 16x^2 &= 0 \\
xy'^3 - 16x^2 &= 2yy'^2 \\
xy' - \frac{16x^2}{y'^2} &= 2y \\
\text{Stel:}p = y' & \\
2p - \frac{16x^2}{p^2} &= 2y(*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
2p &= p - \frac{32x}{p^2} + (x + \frac{32x^2}{p^3})p' \\
p + \frac{32x}{p^2} &= \frac{x}{p}(p + \frac{32x^2}{p^2})p' \\
\text{Nu moet:}\frac{x}{p}p' &= 1 \\
\ln|p| &= \ln|Cx| \\
p &= Cx \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
Cx^2 - \frac{16x^2}{x^2C^2} &= 2y \\
Cx^2 - \frac{16}{C^2} &= 2y(**) \\
\text{We zoeken C voor } (0,-2) & \\
-\frac{16}{C^2} &= -4 \\
C &= \pm 2 \\
\text{We subsitueren deze C terug in (**)} & \\
\pm 4x^2 - \frac{16}{4} &= 2y \\
\text{PO:} \pm x^2 &= 2y + 1
\end{aligned}$$

12. $2y'^2 = 2x^2y' - 3xy$

$$
\begin{aligned}
2y'^2 &= 2x^2y' - 3xy \\
\frac{3}{2}xy &= x^2y' - y'^2 \\
\frac{3}{2}y &= xy' - \frac{y'^2}{x} \\
\text{Stel:}p = y' & \\
\frac{3}{2}y &= xp - \frac{p^2}{x}(*) \\
\text{Afleiden naar x} & \\
\frac{3}{2}p &= p + \frac{p^2}{x^2} + (x - \frac{2p}{x})p' \\
\frac{1}{2}p - \frac{p^2}{x^2} &= 2\frac{x}{p}(\frac{1}{2}p - \frac{p^2}{x^2})p' \\
\text{I:}\frac{1}{2}p - \frac{p^2}{x^2} &= 0 \\
\frac{1}{2} &= \frac{p}{x^2} \\
\frac{x^2}{2} &= p \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
\frac{3}{2}y &= \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4x} \\
\frac{3}{2}y &= \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{4} \\
\text{SO:}6y &= x^3 \\
\text{II:}2\frac{x}{p}p' &= 1 \\
\int \frac{dp}{p} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x} \\
\ln|p| &= \frac{1}{2}\ln|Cx| \\
p &= \pm\sqrt{Cx} \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
\frac{3}{2}y &= \pm x\sqrt{Cx} - \frac{Cx}{x} \\
\text{AO:}(3y + C)^2 &= Cx^3
\end{aligned}
$$

In de laatste stap werd $\frac{1}{2}$ in C gebracht.

6 Meetkundige toepassingen

Geen oefeningen op raaklijnen en normalen, dus enkel de oefeningen uit reeks 8 en 9.
Reeks 8: Bepaal de isogonale krommenbundel van:

1. $x^2 + y^2 = C$ en $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= C(1) \\ 2x + 2yy' &= 0(2) \end{aligned}$$

C elimineren uit (1) en (2) geeft vgl (2)

$$\begin{aligned} \text{Stel:}y' &= \frac{y' - tg(\frac{\pi}{4})}{1 + y'tg(\frac{\pi}{4})} \\ 2x + 2y\frac{y' - 1}{1 + y'} &= 0 \\ x(1 + y') + y(y' - 1) &= 0 \\ (x - y)dx + (x + y)dy &= 0 \\ \text{homogene vgl, stel:}y &= ux \\ dy &= udx + xdu \\ (x - ux)dx + (x + ux)(udx + xdu) &= 0 \\ (1 - u)dx + (1 + u)udx + (1 + u)xdu &= 0 \\ (1 - u + u + x^2)dx &= -(1 - u)xdu \\ \frac{dx}{-x} &= \frac{1 + u}{1 + u^2}du \\ -\ln|x| &= Bgtg(u) + \frac{1}{2}\ln|1 + u^2 + c \\ -2\ln|x| &= 2Bgtg(u) + \ln|1 + \frac{y^2}{x^2}| + c \\ \ln|c(x^2 + y^2)| &= -2Bgtg(\frac{y}{x}) \\ x^2 + y^2 &= ce^{-2Bgtg(\frac{y}{x})} \end{aligned}$$

2. $x^2 = C(y - \sqrt{3}x)$ en $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned} x^2 &= C(y - \sqrt{3}x)(1) \\ 2x &= C(y' - \sqrt{3})(2) \end{aligned}$$

C elimineren uit (1) en (2) geeft $\frac{(1)}{(2)}$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2x} &= \frac{y - \sqrt{3}x}{y' - \sqrt{3}} \\ \frac{x}{2}(y' - \sqrt{3}) &= y - \sqrt{3}x(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Stel:}y' &= \frac{y' - tg(\frac{\pi}{3})}{1 + y'tg(\frac{\pi}{3})} \\
y' &= \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + y'\sqrt{3}} \\
y' - \sqrt{3} &= \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} - \sqrt{3} \\
&= \frac{2y' - 2\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} \\
\text{Substitueren in (*)} & \\
-2\frac{x}{2}\frac{y' + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} &= y - \sqrt{3}x \\
-(y' + \sqrt{3})x &= (y - \sqrt{3}x)(1 + \sqrt{3}y') \\
-y'x - \sqrt{3}x &= y - \sqrt{3}x + \sqrt{3}yy' - 3xy \\
-y'x &= y + \sqrt{3}yy' - 3xy \\
2xy' - \sqrt{3}yy' &= y \\
\text{Homogene DVG} & \\
(2x - \sqrt{3}y)dy &= ydx \\
ydx + (\sqrt{3}y - 2x)dy &= 0 \\
\text{Stel:}x &= uy \\
dx &= udy + ydy \\
y(udy + ydu) + (\sqrt{3}y - 2uy)dy &= 0 \\
udy + ydu + (\sqrt{3} - 2u)dy &= 0 \\
ydu + (\sqrt{3} - u)dy &= 0 \\
ydu &= (u - \sqrt{3})dy \\
\int \frac{du}{u - \sqrt{3}} &= \int \frac{dy}{y} \\
\ln|u - \sqrt{3}| &= \ln|y| + C \\
Cy &= u - \sqrt{3} \\
Cy &= \frac{x}{y} - \sqrt{3} \\
Cy^2 &= x - \sqrt{3}y
\end{aligned}$$

Reeks 9: Bepaal de orthogonale krommenbundel van

1. $xy = C$

$$\begin{aligned}
xy &= C \\
y + xy' &= 0 \\
\text{Stel:}y' &= -\frac{1}{y'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - \frac{x}{y'} &= 0 \\ yy' &= x \\ \int y dy &= \int x dx \\ y^2 - x^2 &= C \end{aligned}$$

2. $y = Ce^{-2x}$

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-2x} \\ y' &= -2Ce^{-2x} \end{aligned}$$

We delen deze door elkaar om C te elimineren

$$\begin{aligned} \frac{y}{y'} &= -\frac{1}{2} \\ 2y &= -y' \\ \text{Stel:} y' &= -\frac{1}{y'} \\ 2y &= \frac{1}{y'} \\ \int 2y dy &= \int dx \\ y^2 &= x + C \\ y^2 - x &= C \end{aligned}$$

Dit zijn parabolen.

3. $y^2 = 2x^2(1 - Cx)$

$$\begin{aligned} y^2 &= 2x^2(1 - Cx) \\ y^2 - 2x^2 &= -2Cx^3(1) \\ 2yy' - 4x &= -6Cx^2(2) \\ \frac{(1)}{(2)} & \\ y^2 - 2x^2 &= \frac{1}{3}x(2yy' - 4x) \\ 3y^2 - 6x^2 &= 2xyy' - 4x^2 \\ \frac{3y^2 - 2x^2}{xy} &= 2y' \\ 3\frac{y}{x} - 2\frac{x}{y} &= 2y' \\ \text{Stel:} y' &= -\frac{1}{y'} \\ 2\frac{x}{y} - 3\frac{y}{x} &= \frac{2}{y'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\frac{x}{y} - 3\frac{y}{x} &= \frac{2dx}{dy} \\
\text{Homogeen, stel:} x = uy & \\
dx &= udy + ydu \\
2u - \frac{3}{u} &= 2\frac{udy + ydu}{dy} \\
-\frac{3}{u}dy &= 2ydu \\
-\int \frac{3}{y}dy &= 2\int udu \\
-3\ln|y| + C &= u^2 \\
-3\ln|Cy| &= \frac{x^2}{y^2} \\
x^2 + 3y^2\ln|Cy| &= 0
\end{aligned}$$

7 Fysische Toepassingen

1. De desintegratiesnelheid $\frac{dN}{dt}$ van radium is evenredig met N, het aantal aanwezig deeltjes. De halveringstijd is 1600 jaar. Bepaal het percentage dat verdwenen is na 100 jaar.

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

k is een evenredigheidsfactor, het minteken staat er omdat het hier om afbraak, vermindering gaat.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= -kdt \\ \int \frac{dN}{N} &= -k \int dt \\ \ln|N| &= -kt + C \\ N &= Ce^{-kt} \end{aligned}$$

Op het tijdstip 0 zijn N_0 deeltjes aanwezig:

$$\begin{aligned} N_0 &= Ce^0 \\ N_0 &= C \\ N &= N_0 e^{-kt} \end{aligned}$$

Als we in deze vergelijking de tweede situatie (1600 jaar geeft $\frac{N_0}{2}$ deeltjes) brengen kunnen we de 2de constante k bepalen.

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{2} &= N_0 e^{-k1600} \\ \ln\frac{1}{2} &= -1600k \\ k &= \frac{\ln 2}{1600} \\ \text{PO:}N &= N_0 e^{-\frac{ln2}{1600}t} \end{aligned}$$

Nu berekenen we de situatie na 100 jaar:

$$\begin{aligned} N &= N_0 e^{-\frac{\ln 2}{16}} \\ N &= 0.958 N_0 \end{aligned}$$

Er is dus 4.2% verdwenen na 100 jaar.

2. Als de aangroei van een bevolking evenredig is met die bevolking en als de bevolking verdubbelt na 50 jaar, hoelang duurt het voordat de bevolking verdrievoudigd is ?

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= kN\\ \int \frac{dN}{N} &= \int kdt\\ \ln|N| &= kt + C\\ N &= e^{kt+C}\end{aligned}$$

Op $t = 0$ bedraagt de bevolking N_0

$$\begin{aligned}N_0 &= e^C\\ C &= \ln|N_0\end{aligned}$$

Na 50 jaar verdubbelt de bevolking in $N = e^{kt+\ln|N_0|}$

$$\begin{aligned}2N_0 &= e^{50k+\ln|N_0|}\\ \ln|2N_0| &= 50k + \ln|N_0|\\ \ln|\frac{2N_0}{N_0} &= 50k\\ \frac{\ln 2}{50} &= k\end{aligned}$$

Nu zoeken we t waar $N = 3N_0$ in $N = e^{\frac{\ln 2}{50}t+\ln|N_0|}$

$$\begin{aligned}3N_0 &= e^{\frac{\ln 2}{50}t+\ln|N_0|}\\ \ln|3N_0| &= \frac{\ln 2}{50}t + \ln|N_0|\\ 50\frac{\ln 3}{\ln 2} &= t\\ t &= 79.2481\end{aligned}$$

De bevolking zou verdrievoudigt zijn na 79,2481 jaar.

3. Volgens de wet van Newton koelt een voorwerp in bewegende lucht af met een snelheid die evenredig is met het temperatuurverschil tussen het voorwerp en de lucht. Als de temperatuur van de lucht 30°C bedraagt en het voorwerp van 100°C tot 70°C afkoelt in 15 minuten, bereken dan de tijd waarna het voorwerp afgekoeld is tot 40°C.

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= -k(T-30^\circ) \\ \ln|T-30^\circ| &= -kt+C \\ T &= 30^\circ + Ce^{-kt} \end{aligned}$$

Op t=0 is T=100°.

$$\begin{aligned} 100 &= 30 + Ce^0 \\ C &= 70^\circ \\ T &= 30^\circ + 70^\circ e^{-kt} \end{aligned}$$

Na 15 minuten is T= 70°

$$\begin{aligned} 70 &= 30 + 70e^{-k15} \\ \frac{4}{7} &= e^{-15k} \\ \frac{\ln 7 - \ln 4}{15} &= k \\ \text{PO:}T &= 30^\circ + 70^\circ e^{-\frac{\ln 7 - \ln 4}{15}t} \end{aligned}$$

Nu zoeken we de tijd die nodig is om af te koelen tot 40°

$$40 = 30 + 70e^{-\frac{\ln 7 - \ln 4}{15}t}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= e^{-\frac{\ln 7 - \ln 4}{15}t} \\ \ln\frac{1}{7} &= -\frac{\ln 7 - \ln 4}{15}t \\ \ln 7 &= (\frac{\ln 7 - \ln 4}{15})t \\ \frac{15\ln 7}{\ln 7 - \ln 4} &= t \end{aligned}$$

De afkoeling duurt uiteindelijk zo'n 52 minuten

4. In een stroomkring is R de weerstand, L de zelfinductie en E de constante elektromotorische kracht van de stroombron. Bij het sluiten van deze RL-keten ontstaat (volgens Kirchhoff) een stroomsterkte i die voldoet aan: $L\frac{di}{dt} + Ri = E$. Bepaal in functie van t als op t=0 de stroomsterkte 0 is

$$\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri &= E \\ L\frac{di}{dt} &= E - Ri \\ \int \frac{di}{E - Ri} &= \int \frac{dt}{L} \\ -\frac{1}{R}\ln|E - Ri| &= \frac{t}{L} + C \end{aligned}$$

Op $t = 0$ is $i = 0$

$$-\frac{1}{R}\ln|E| = C$$

C substitueren en i uitdrukken in functie van t

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R}\ln|E - Ri| &= \frac{t}{L} - \frac{1}{R}\ln|E| \\ \ln|E - Ri| &= -\frac{Rt}{L} - \ln|E| \\ E - Ri &= e^{-\frac{Rt}{L} + \ln|E|} \\ E - Ri &= Ee^{-\frac{Rt}{L}} \\ Ri &= E(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \\ i &= \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \end{aligned}$$

5. Een parachutist valt met een beginsnelheid van $55\frac{m}{s}$. De luchtweerstand is $\frac{Gv^2}{25}$ Newton, met G het gewicht van de man. Bepaal de snelheid na een halve minuut.

$$\begin{aligned}
ma &= mg - G\frac{v^2}{25} \\
ma &= mg - mg\frac{v^2}{25} \\
\frac{dv}{dt} &= g - g\frac{v^2}{25} \\
25\frac{dv}{dt} &= (25 - v^2)g \\
-\frac{25}{v^2 - 25}dv &= gdt \\
-\frac{25}{10}\ln|\frac{v-5}{v+5}| &= gt + C \\
\frac{v-5}{v+5} &= Ce^{-\frac{2}{5}dt}
\end{aligned}$$

Op t=0 is $v = v_0 = 55$

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} &= Ce^0 \\
C &= \frac{5}{6} \\
\frac{v-5}{v+5} &= \frac{5}{6}e^{-\frac{2}{5}dt}
\end{aligned}$$

Nu zoeken we de snelheid na 30 seconden.

$$\begin{aligned}
6(v-5) &= 5(v+5)e^{-\frac{2}{5}gt} \\
v(6 - 5e^{-\frac{2}{5}gt}) &= 30 + 25e^{-\frac{2}{5}gt} \\
v &= 5\frac{6 + 5e^{-\frac{2}{5}gt}}{6 - 5e^{-\frac{2}{5}gt}}
\end{aligned}$$

De snelheid bedrgaat $5\frac{m}{s}$.

6. Een vat met inhoud 20 liter bevat lucht $(80\%N_2, 20\%O_2)$. Men pompt 0,1 liter stikstof per seconde in het vat, terwijl er een zelfde hoeveelheid mengsel uit het vat stroomt. Na hoeveel tijd bevat het vat 99% stiktstof ?
x = hoeveelheidN_2
0,1dt = N_2toename
$0,1\frac{x}{20}dt = N_2$ afname

$$\begin{aligned}
dx &= 0,1dt - 0,1\frac{x}{20}dt \\
dx &= 0,1(1-\frac{x}{20})dt \\
\frac{dx}{1-\frac{x}{20}} &= 0,1dt \\
-20\ln|C(1-\frac{x}{20})| &= 0,1t \\
\ln|C(1-\frac{x}{20})| &= -\frac{0,1}{20}t \\
C(1-\frac{x}{20} &= e^{-0,005}t \\
1-\frac{x}{20} &= e^{-0,005}t \\
\frac{x}{20} &= 1-e^{-0,005}t
\end{aligned}$$

Invoegen van de beginvoorwaarden.

$$\begin{aligned}
1-Ce^0 &= 0,80 \\
C &= 0,2
\end{aligned}$$

t bepalen in $1-0,2e^{-0,005t} = \frac{x}{20}$, waar$\frac{x}{20}$ gelijk is aan 0,99

$$\begin{aligned}
1-0,2e^{-0,005t} &= 0,99 \\
0,005 &= e^{-0,005t} \\
\ln(0,05) &= -0,005t \\
t &= \frac{\ln(0,005)}{-0,005} \\
t &= 599,146
\end{aligned}$$

Na 10 minuten bedroeg het gehalte aan stikstof 99%.

7. Een tank bevat 450 liter pekel bestaande uit 30 kg zout opgelost in water. Zout water dat $\frac{1}{9}$kg zout per liter bevat stroomt in de tank met een snelheid van 9 liter per minuut. De gemengde vloeistof stroomt uit de tank met een snelheid van 13.5 liter per minuut. Hoeveel zout zit er in de tank op het moment dat de tank 180 liter vloeistof bevat?
   x=hoeveelheid zout (kg)
   V=inhoud (l)
   t=tijd (min)
   $dx = C_iV_1dt - C_uV_udt$, hierin is $C_u = \frac{\text{hoeveelheid zout}}{\text{volume}}$. De hoeveelheid zout is gegeven door x en het variabele volume is gegeven door $450 - 13,5t + 9t.C_u$ wordt dan: $\frac{x}{450-4,5t}$.

$$
\begin{aligned}
dx &= C_iV_idt - \frac{xV_u}{450-4,5t}dt \\
dx &= dt - \frac{13,5}{450-4,5t}xdt \\
dx &= dt - \frac{3x}{100-t}dt \\
dx &= \frac{100-t-3x}{100-t}dt \\
dx + \frac{3x+t-100}{100-t}dt &= \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{100-3x-t}{100-t} \\
\frac{dx}{dt} + \frac{3x}{100-t} &= 1 \\
& \text{Dit is een lineaire DVG} \\
Stel: & \quad x = uv \\
& \quad dx = udv + vdu \\
udv + vdu + \frac{3}{100-t}uv &= 1
\end{aligned}
$$

We bepalen u zodat $vdu + \frac{3}{t-100}uv = 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{3}{100-t}u \\
\int \frac{du}{u} &= -3\int \frac{dx}{100-t} \\
\ln|u| &= \ln|(100-t)^3| + C(=0) \\
u &= (100-t)^3 \\
(100-t)^3dv &= 1 \\
\int dv &= \int (100-t)^{-3}dt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(100-t)^{-2}+C \\ uv &= (100-t)^3(\frac{1}{2}(100-t)^{-2}+C) \\ x &= \frac{1}{2}(100-t)+C(100-t)^3 \end{aligned}$$

Op $t = 0$ is $x = 30$

$$\begin{aligned} 30 &= 50 + C \cdot 100^3 \\ C &= \frac{-20}{10^6} \\ C &= \frac{-2}{10^5} \end{aligned}$$

Op het moment dat het volume 180 liter bedraagt is $t = 60$

$$x = 18,72$$

8 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Dit hoofdstuk werd niet behandeld in de theoriecursus.

9 Lineaire Differentiaalvergelijkingen

1. $L(D)y = 0$ is een lineaire DVG met constante coëfficiënten. $L(D) = (D-r)^3, r \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal 3 lineair onafhankelijke PO vande DVG

   (b) Bewijs dat de PO effectief lineasir onafhankelijk zijn

   (c) Bepaal de AO van de DVG

   (a) We bepalen eerst de oplossingen voor $L(D) = 0$. Dit geeft voor $L(D) = D-r)^3$ de oplossing r met een multipliciteit 3. De PO van de differntiaalvergelijking worden dan e^{rx}, xe^{rx} en x^2e^{rx}.

   (b) Om aan te tonen dat deze 3 PO lineair onafhankelijk zijn lossen we de Wronskiaan op

$$\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}+2xe^{2x} & 2xe^{2x}+2x^2e^{2x} \\ 4e^{2x} & 2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x} & 2e^{2x}+4xe^{2x}+4xe^{2x}+4x^2e^{2x} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}(1+2x) & e^{2x}(2x+2x^2) \\ 4e^{2x} & e^{2x}(2+2+4x) & e^{2x}(2+4x+4x+4x^2) \end{vmatrix} \\
&= e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 2 & 1+2x & 2x(1+x) \\ 4 & 4(1+x) & 2(1+4x+2x^2) \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \end{cases} &= e^{6x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 4 & 2(1+4x) \end{vmatrix} \\
W &= e^{6x}((2+8x)-8x)) \\
W &= 2e^{6x} \\
& \quad \forall x \in \mathbb{R}; W \neq 0
\end{aligned}$$

   (c) De AO is: $y = C_1e^{rx} + C_2xe^{rx} + C_3x^2e^{rx}$

2. $L(D)y = 0$ is een lineaire DVG met constante coëfficiënten van de derde orde en $L(D) = 0$ heeft oplossingen $r(\in \mathbb{R})$ en$j\beta(\beta \in \mathbb{R}_0)$.

   (a) Bepaal de AO van deze differentiaalvergelijking.

   (b) Toon aan dat de PO die je daarbij gebruikt lineair onafhankelijk zijn

(a) De oplossingen van $L(D)y = 0$ dat van de derde orde is zijn $r, j\beta, -j\beta$ (complex toegevoegde!). Dit resulteert in volgende PO van de DVG $y_1 = e^{2x}, y_2 = \cos(\beta x), y_3 = \sin(\beta x)$. Deze resulteren in de AO $C_1 e^{2x} + C_2 \cos(\beta x) + C_3 \sin(\beta x) = 0$.

(b) Om aan te tonen dat de PO $y_1 = e^{2x}, y_2 = \cos(\beta x), y_3 = \sin(\beta x)$ lineair onafhankelijk zijn berekenen we nu de Wronskiaan:

$$
\begin{aligned}
W &= \begin{vmatrix} e^{rx} & \cos(\beta x) & \sin(\beta x) \\ re^{rx} & -\beta\sin(\beta x) & \beta\cos(\beta x) \\ r^2e^{rx} & -\beta^2\cos(\beta x) & -\beta^2\sin(\beta x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta x) & \sin(\beta x) \\ r & -\beta\sin(\beta x) & \beta\cos(\beta x) \\ r^2 & -\beta^2\cos(\beta x) & -\beta^2\sin(\beta x) \end{vmatrix} \\
\{\ R_3 + \beta^2 R_1 &= e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta x) & \sin(\beta x) \\ r & -\beta\sin(\beta x) & \beta\cos(\beta x) \\ r^2+\beta^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= e^{2x}(r^2+\beta^2)(\beta\cos^2(\beta x) + \beta\sin^2(\beta x)) \\
&= e^{2x}(r^2+\beta^2)(\beta) \\
& \quad \forall x \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}_0; W \neq 0
\end{aligned}
$$

3. $y'' + y' - 6y = 0$
Dit is een homogene lineaire DVG. Bepalen AOH volstaat bij dit type.

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' + y' - 6y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 + D - 6)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 + D - 6 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-2)(D+3) = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} = y
\end{aligned}
$$

4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 - 3D^2 + 3D - 1 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D^2 - 2D + 1) = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D-1)^2 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)^3 = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x = y
\end{aligned}
$$

De oplossing $D = 1$ heeft multipliciteit 3 in dit voorbeeld.

5. $y''' + 6y'' + 9y' = 0$

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' + 6y'' + 9y' = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 + 6D^2 + 9D) = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 + 6D^2 + 9D = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D(D^2 + 6D + 9) = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D(D+3)^2 = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow C_1e^{0x} + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1 + C_2e^{-3x} + C_3xe^{-3x} = y \end{aligned}$$

6. $y'' - 2y' + 10y = 0$

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' - 2y' + 10y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 - 2D + 10)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 - 2D + 10 = \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 3j, 1 - 3j \\ AOH &\Leftrightarrow C_1e^x \cos(3x) + C_2e^x \sin(3x) = y \end{aligned}$$

7. $y'''' + 8y'' + 16y = 0$

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'''' + 8y'' + 16y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^4 + 8D^2 + 16)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^4 + 8D^2 + 16 = 0 \\ \lambda &\Leftrightarrow D^2 \\ L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \\ L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda + 4)^2 = 0 \\ \lambda &\Leftrightarrow -4(\text{multipliciteit } 2) \\ D &\Leftrightarrow \pm 2j(\text{multiplicteit } 2) \\ AOH &\Leftrightarrow C_1 \cos(2x) + C_2x \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + C_3x \sin(2x) \end{aligned}$$

8. $y'''' + 5y'' = 36y$

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'''' + 5y'' - 36y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^4 + 5D^2 - 36)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^4 + 5D^2 - 36 = 0 \\ \lambda &\Leftrightarrow D^2 \\ L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 + 5\lambda - 36 = 0 \\ L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 9) = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-2)(D+2)(D-3j)(D+3j) = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos(3x) + C_4 \sin(3x) = y \end{aligned}$$

9. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{4x}$
   Bepalen AOH

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D+2)(D-3) = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} = y \end{aligned}$$

Bepalen PONH, $\frac{1}{L(\alpha)}e^{\alpha x}$ is oplossing van $L(D)y = e^{\alpha x}$ als $L(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{4x} &\ni \frac{1}{(4-1)(4+2)(4-3)}e^{4x} \\ &= \frac{e^{4x}}{3 \cdot 6 \cdot 1} \\ \text{PONH} &= \frac{e^{4x}}{18} \end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + \frac{e^{4x}}{18}$$

10. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x} + 3)^2$
   Bepalen AOH

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D+2)(D-3) = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} = 0 \end{aligned}$$

Bepalen PONH, $\frac{1}{L(\alpha)}e^{\alpha x}$ is oplossing van $L(D)y = e^{\alpha x}$ als $L(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{PONH} &= \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}(e^{2x} + 3)^2 \\ &= \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}(e^{4x} + 6e^{2x} + 9) \\ &= \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{4x} + \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}6e^{2x} \\ &+ \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}9 \\ &= \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{4x} + 6\frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad 9\frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{0x} \\
&= \quad e^{4x}\frac{1}{3\cdot 6\cdot 1} + 6e^{2x}\frac{1}{1\cdot 4\cdot -1} + 9\frac{1}{-1\cdot 2\cdot -3} \\
\text{PONH} &= \quad \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

11. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^{3x}$
Bepalen AOH

$$\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 - 2D^2 - 5D + 6)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 - 2D^2 - 5D + 6 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D+2)(D-3) = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} = 0
\end{aligned}$$

Bepalen PONH, $\frac{1}{L(\alpha)}e^{\alpha x}$ is oplossing van $L(D)y = e^{\alpha x}$ als $L(\alpha) \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\text{PONH} &= \frac{1}{(D-1)(D+2)(D-3)}e^{3x} \\
&= e^{4x}\frac{1}{2\cdot 5\cdot 0}
\end{aligned}$$

Deze methode is hier niet toepasbaar want $L(\alpha) = 0$! Dus werken we uit via de lange methode
$\frac{1}{D-a}Q(x) = e^{ax}\int e^{-ax}Q(x)dx$

$$\begin{aligned}
PONH &= \frac{1}{(D-3)(D+2)}\cdot\frac{1}{(D-1)}e^{3x} \\
&= \frac{1}{(D-3)(D+2)}\cdot e^x\int e^{-x}e^{3x}dx \\
&= \frac{1}{(D-3)(D+2)}\cdot e^x\int e^{2x}dx \\
&\supseteq \frac{1}{(D-3)(D+2)}\frac{e^{3x}}{2} \\
&= \frac{1}{(D-3)}\cdot\frac{e^{-2x}}{2}\int e^{2x}e^{3x}dx \\
&= \frac{1}{(D-3)}\cdot\frac{e^{-2x}}{2}\int e^{5x}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\supseteq \frac{1}{(D-3)}\frac{e^{3x}}{10}\\
&= \frac{e^{3x}}{10}\int e^{-3x}e^{3x}dx\\
&\ni \frac{xe^{3x}}{10}
\end{aligned}$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + C_3e^{3x} + \frac{xe^{3x}}{10}$$

12. $y'''' + 10y'' + 9y = \cos(2x+3)$

AOH

$$\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'''' + 10y'' + 9y = 0\\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^4 + 10D^2 + 9)y = 0\\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^4 + 10D^2 + 9 = 0\\
\lambda &\Leftrightarrow D^2\\
L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 9 = 0\\
L(\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda+9) = 0\\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-j)(D+j)(D-3j)(D+3j) = 0\\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + C_3\cos(3x) + C_4\sin(3x)
\end{aligned}$$

PONH dmv korte methode nummer 1, overgaan op complex notatie

$$\begin{aligned}
\text{PONH} &= \frac{1}{(D-j)(D+j)(D-3j)(D+3j)}\cos(2x+3)\\
&= \frac{1}{(D-j)(D+j)(D-3j)(D+3j)}\Re e^{(2x+3)j}\\
&\ni \Re e^{3j}\frac{1}{(2j-j)(2j+j)(2j-3j)(2j+3j)}e^{2xj}\\
&= \Re e^{3j}\frac{1}{(j)(3j)(-1j)(5j)}e^{2xj}\\
&= \Re e^{3j}\frac{1}{-15}e^{2xj}\\
&= -\frac{1}{15}\Re e^{(2x+3)j}\\
&= -\frac{1}{15}\Re(\cos(2x+3) + j\sin(2x+3))\\
PONH &= -\frac{1}{15}\cos(2x+3)
\end{aligned}$$

AONHO=AOH+PONH

$$\begin{aligned}
y &= C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + C_3\cos(3x)\\
&\quad +C_4\sin(3x) - \frac{1}{15}\cos(2x+3)
\end{aligned}$$

13. $y'' + 3y' - 4y = \sin(2x)$
AOH

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' + 3y' - 4y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 + 3D - 4)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 + 3D - 4 = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)(D+4) = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1 e^x + C_2 e^{-4x} = 0 \end{aligned}$$

PONH, overgaan op complexe notatie

$$\begin{aligned} \text{PONH} &= \frac{1}{(D-1)(D+4)} \sin(2x) \\ &= \frac{1}{(D-1)(D+4)} \Im e^{2xj} \\ &\ni \Im \frac{1}{(2j-1)(2j+4)} e^{2xj} \\ &= \Im \frac{1}{-8+6j} e^{2xj} \\ &= -\Im \frac{8+6j}{100} (\cos(2x) + j\sin(2x)) \\ PONH &= -\frac{1}{100}(6\cos(2x) + 8\sin(2x)) \end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{100}(6\cos(2x) + 8\sin(2x))$$

14. $y'' + 4y = \cos(2x) + \cos(4x)$
AOH

$$\begin{aligned} L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' + 4y = 0 \\ L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 + 4)y = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 + 4 = 0 \\ L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-2j)(D+2j) = 0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) = 0 \end{aligned}$$

PONH, een deel lossen we op met de korte methode, het andere deel moeten we met de lange methode oplossen omdat $L(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{PONH} &= \frac{1}{(D-2j)(D+2j)} (\cos(2x) + \cos(4x)) \\ &= \frac{1}{(D-2j)(D+2j)} (\Re e^{2xj} + \Re e^{4xj}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Re\left(\frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{2xj} + \frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{4xj})\right) \\
&\ni \Re\left(\frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{2xj} + \frac{1}{(4j-2j)(4j+2j)}e^{4xj})\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{2xj} + \frac{1}{(2j)(6j)}e^{4xj})\right) \\
&= \Re\left(\frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{2xj} - \frac{1}{12}e^{4xj})\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)(D+2j)}e^{2xj}\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)}\cdot\frac{1}{(D+2j)}e^{2xj}\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)}\cdot e^{-2jx}\int e^{2jx}e^{2xj}dx\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)}\cdot e^{-2jx}\int e^{4jx}dx\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)}\cdot\frac{e^{4jx}}{4je^{2jx}}\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{1}{(D-2j)}\cdot\frac{e^{2jx}}{4j}\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{e^{2jx}}{4j}\int e^{-2jx}e^{2jx}dx\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{e^{2jx}}{4j}\int dx\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{e^{2jx}}{4j}x\right) \\
&= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \Re\left(\frac{\cos(2x)+j\sin(2x)}{4j}x\right) \\
\text{PONH} &= -\frac{1}{12}\cos(4x) + \frac{x\sin(2x)}{4}
\end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$y = C_1\cos(2x) + (C_2 + \frac{x}{4})\sin(2x) - \frac{1}{12}\cos(4x)$$

15. $y'' + y' = \sin^2(x)$
AOH

$$\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' + y' = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 + D)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 + D = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(D)=0 &\Leftrightarrow D(D+1)=0 \\ AOH &\Leftrightarrow C_1+C_2e^{-x}=0 \end{aligned}$$

PONH

$$\begin{aligned} \text{PONH} &= \frac{1}{D(D+1)}\sin^2(x) \\ &= \frac{1}{D(D+1)}\frac{1-\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D(1+D)}1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D(1+D)}\Re e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D(D+1)}e^{0x}-\frac{1}{2}\Re\cdot\frac{1}{D(1+D)}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D}\cdot\frac{1}{1+D}e^{0x}-\frac{1}{2}\Re\cdot\frac{1}{D(1+D)}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{D}\cdot 1-\frac{1}{2}\Re\cdot\frac{1}{D(1+D)}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\Re\cdot\frac{1}{2j(1+2j)}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\Re\cdot\frac{1}{2j-4}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}x+\Re\cdot\frac{2+j}{20}e^{2jx} \\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{20}\Re\cdot(2+j)(\cos(2x)+j\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos(2x)-\sin(2x)) \end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$y = C_1+C_2e^{-x}\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos(2x)-\sin(2x))$$

16. $2y''+2y'+3y=x^2+2x-1$

AOH

$$\begin{aligned} L(D)y=0 &\Leftrightarrow 2y''+2y'+3y=0 \\ L(D)y=0 &\Leftrightarrow (2D^2+2D+3)y=0 \\ L(D)=0 &\Leftrightarrow 2D^2+2D+3=0 \\ D_1 &\Leftrightarrow D_1=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\sqrt{5} \\ D_2 &\Leftrightarrow D_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\sqrt{5} \\ AOH &\Leftrightarrow y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{5}x)+C_2e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{5}x) \\ AOH &\Leftrightarrow y=\left(C_1\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x)+C_2\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} \end{aligned}$$

PONH, dmv de tweede korte methode. Delen tot D^2

$$\begin{aligned}
\text{PONH} &= \frac{1}{2D^2+2D+3}(x^2+2x-1 \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{2}{9}D-\frac{2}{27}D^2\right)\cdot\left(x^2+2x-1\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{9}\left(2x+2\right)-\frac{2}{27}(2) \\
\text{PONH} &= \frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{9}(2x+2)-\frac{2}{27}(2)
\end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH

$$\begin{aligned}
y &= \left(C_1\cos(\frac{\sqrt{5}}{2}x)+C_2\sin(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} \\
&\quad +\frac{1}{3}\left(x^2+2x-1\right)-\frac{2}{9}(2x+2)-\frac{2}{27}(2)
\end{aligned}$$

17. $y'''' + y'' = x^2 + x$
AOH

$$\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' + y'' = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3+D^2)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2(D^2+1) = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^{0x}+C_2xe^{0x}+C_3\sin(x)+C_4\cos(x) \\
AOH &\Leftrightarrow C_1+C_2x+C_3\sin(x)+C_4\cos(x)
\end{aligned}$$

PONH

$$\begin{aligned}
\text{PONH} &= \frac{1}{D^4+D^2}(x^2+x) \\
&= \left(\frac{1}{D^2}-1+D^2\right)(x^2+x) \\
&= \frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2-x+2
\end{aligned}$$

AONH=AOH+PONH $(-x+2)$ worden in de constanten C_1 en C_2 ingebracht.

$$y = C_1+C_2x+C_3\sin(x)+C_4\cos(x)+\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2$$

18. $y'''' + 2y''' - 3y'' = x^2 + 3e^{2x} + 4\sin(x)$
AOH

$$L(D)y = 0 \Leftrightarrow y'''' + 2y''' - 3y'' = 0$$

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^4 + 2D^3 - 3D^2)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^4 + 2D^3 - 3D^2 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2(D^2 + 2D - 3) = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2(D-1)(D+3) \\
AOH &\Leftrightarrow C_1 + C_2x + C_3e^x + C_4e^{-3x}
\end{aligned}
$$

PONH is heel veel werk
AONH = AOH + PONH

19. $y'' - 4y = xe^{3x}$
AOH

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' - 4y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 - 4)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 - 4 = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}
\end{aligned}
$$

PONH

$$
\begin{aligned}
PONH &= \frac{1}{D^2 - 4}xe^{3x} \\
&= e^{3x}\frac{1}{(D+3)^2 - 4}x \\
&= e^{3x}\frac{1}{D^2 + 6D + 5}x \\
&= e^{3x}\left(\frac{1}{5} - \frac{6}{25}D\right)x \\
&= e^{3x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)
\end{aligned}
$$

AONH=AOH+PONH

$$
y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}e^{3x}\left(\frac{1}{5}x - \frac{6}{25}\right)
$$

20. $y'' + 4y = x\sin(2x)$
AOH

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y'' + 4y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^2 + 4)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^2 + 4 = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1\sin(2x) + C_2\cos(2x)
\end{aligned}
$$

PONH,eerst de derde korte methode $\frac{1}{L(D)}e^{\alpha x}H(x) = e^{\alpha x}\frac{1}{L(D+\alpha)}H(x)$ gevolgd door de 2de korte methode.

$$
\begin{aligned}
PONH &= \frac{1}{D^2+4}x\sin(2x) \\
&= \frac{1}{D^2+4}x\Im e^{2xj} \\
&= \Im e^{2jx}\frac{1}{(D+2j)^2+4}x \\
&= \Im e^{2jx}\frac{1}{D^2+4jD}x
\end{aligned}
$$

PONH volgt na de uitwerking van de complexe deling.

21. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x$
AOH

$$
\begin{aligned}
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\
L(D)y = 0 &\Leftrightarrow (D^3 - 3D^2 + 3D - 1)y = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow D^3 - 3D^2 + 3D - 1 = 0 \\
L(D) = 0 &\Leftrightarrow (D-1)^3 = 0 \\
AOH &\Leftrightarrow C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x
\end{aligned}
$$

PONH is niet mogelijk via de eerste korten methode omdat $L(\alpha) = 0$.

$$
\begin{aligned}
PONH &= \frac{1}{(D-1)^3}e^x \\
&= \frac{1}{(D-1)^2}e^x\int e^{-x}e^x dx \\
&\supseteq \frac{1}{(D-1)^2}xe^x \\
&= e^x\frac{1}{D+1-1}^2 x \\
&= e^x\frac{1}{D^2}x \\
&\supseteq e^x\frac{1}{D}\frac{x^2}{2} \\
&\ni e^x\frac{x^3}{6}
\end{aligned}
$$

AONH=AOH+PONH

$$
\begin{aligned}
y &= C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + e^x\frac{x^3}{6} \\
y &= e^x\left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \frac{x^3}{6}\right)
\end{aligned}
$$

22. $y'' - y = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$

23. $y' + y = \frac{1}{e^x+1}$

24. $y'' + y - 4e^x = 0$

25. $y'''' - y = 8e^x$

Deel II

Reeksen

10 Rijen

1. Voor welke waarden van q is de meetkundige rij met rede q convergent? We onderscheiden volgende situaties:

   (a) $q > 1$ divergent naar ∞

   (b) $|q| < 1$ convergent

   (c) $q < -1$ divergent

   (d) $q = 1$ convergent

   (e) $q = -1$ divergent

2. Voor welke waarden van v is de rekenkundige rij met verschil v convergent ?

   (a) $v > 0$ divergent naar $+\infty$

   (b) $v = 0$ convergent naar a_1

   (c) $v < 0$ divergent naar $-\infty$

3. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...$
   Convergeert naar 1.

4. $\frac{5}{2}, \frac{10}{4}, \frac{15}{8}, \frac{20}{16}, ...$
   Convergeert naar 0.

5. $\cos(\pi), \cos(2\pi), \cos(3\pi), \cos(4\pi), ...$
   Divergent.

6. $8, -2, 2, -1, \frac{1}{2}, ...$
   Convergeert naar 0.

7. $100, 99, 98, 97, ...$
   Divergeert naar $-\infty$.

11 Reeksen:Algemene Begrippen

Onderzoek de convergentie van volgende reeksen en bepaal indien mogelijk de reekssom

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ...$
   Dit is een meetkundige reeks met rede $q = -\frac{1}{2}$, vermits $|q| < 1$ convergeert het geheel naar $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

2. $-3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{16} + ...$
   Equivalent met:
   $-3(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ...)$
   Deze reeks convergeert naar $-3 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = -2$

3. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...$
   Equivalent met:
   $2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...)$
   Het tweede deel convergeert naar $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$
   Metgevolg convergeert het geheel naar $2 + 2 = 4$.

4. $1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,1 + ...$
   Equivalent met $1+(0,1+0,1+0,1+0,1+...)$. Waarvan het tweede deel een meetkundige reeks is met rede 1, maw het tweede deel divergeert naar $+\infty$.

5. Onderzoek de convergentie van de rekenkundige reeks.

   - Convergent
     Als $v = 0$ is er convergentie naar $a_1 \cdot \infty$, dus convergentie als deze eerste term gelijk is aan 0.
   - Divergent naar $+\infty$
     Als $v > 0$
     Of als $v = 0$ en de eerste term > 0 $(\infty \cdot a_1 = +\infty)$
   - Divergent naar $-\infty$
     Als $v < 0$
     Of als $v = 0$ en de eerste term < 0 $(\infty \cdot a_1 = -\infty)$

12 Reeksen met uitsluitend positieve termen

Onderzoek de convergentie van volgende reeksen

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
   Vergelijkingscriterium II

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} &\sim \frac{1}{n^2} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot \frac{n^2}{1} &= 1 \neq 0, \neq \infty \end{aligned}$$

   Vermits de hyperharmonische reeks convergeert als ($p > 1$) zal deze reeks dat ook doen.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$
   Vergelijkingscriterium II

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} &\sim \frac{1}{n} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n+1} \cdot \frac{n}{1} &= \frac{1}{3} \neq 0, \neq \infty \end{aligned}$$

   De hyperharmonische is divergent als $p \leq 1$ dus zal deze reeks ook divergent naar ∞ zijn.

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$
   Integratiecriterium van Cauchy, $\frac{1}{n\ln(n)}$ is dalend en continu over het interval $[0, +\infty]$, dit volgt uit het tekenonderzoek van de eerste afgeleide.

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)} dn &= [\ln(\ln(n))]_2^{+\infty} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

   Dus het geheel is divergent naar ∞.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$
   Vergelijkingscriterium II

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2} &\sim \frac{1}{n} \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n}{1+n^2} \cdot \frac{n}{1} &= 1 \neq 0, \neq \infty \end{aligned}$$

   De hyperharmonisch reeks divergeert naar ∞ als $p \leq 1$, de opgave zal eveneens divergeren.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n\frac{1}{5^n}$
   Convergentiecriterium van D'Alembert
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^n\frac{1}{5^n}$$
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{10}\right)^{n+1}\frac{1}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{1}\left(\frac{10}{11}\right)^n\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{10}\right)\frac{1}{5}\\ &= \frac{11}{50}\end{aligned}$$
   $\frac{11}{50}<1$ dus is de reeks convergent.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$
   Convergentiecriterium van D'Alembert
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n}$$
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^5}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^5}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^5}{5n^5}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$
   $\frac{1}{5}<1$ dus is de reeks convergent.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$
   Integratiecriterium van Cauchy, het geheel is een dalend continue functie.
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}$$
$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty}\frac{1}{n\ln^2(n)}dn &= \left[-1\frac{1}{\ln(n)}\right]_2^{+\infty}\\ &= \frac{1}{\ln(2)}\end{aligned}$$
   Gevolg: de reeks zal eveneens convergeren.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
   Convergentiecriterium van Cauchy
$$\sum_{n=1}\infty\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$= e^1$$

$e > 1$ dus divergeert het geheel naar $+\infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$
Convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+3)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Deze limiet gaat naar nul dus de reeks zal eveneens convergeren.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$
Vergelijkingscriterium II

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2}}{1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+n}} \\ &= 1 \neq 0, \neq \infty \end{aligned}$$

Equivalent met de hyperharmonische reeks $(\frac{1}{n})$,het geheel zal dus divergeren naar ∞.

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$
Convergentiecriterium van D'Alembert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} \cdot \frac{(2n+1)2^{2n+1}}{1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+3)2^2} \cdot \frac{(2n+1)}{1} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$\frac{1}{4} < 1$ dus de reeks zal convergeren.

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n}$
Vergelijkinscriterium II.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} &\sim \frac{1}{n^2} \\
\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-2}{n^4+5n} \cdot \frac{n^2}{1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4-2n^2}{n^4+5n} \\
&= 3 \neq 0, \neq \infty
\end{aligned}$$

De Hyperharmonische reeks is convergent als $p > 1$, dus deze reeks is eveneens convergent.

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
Convergentiecriterium van Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \\
&= \frac{1}{3} e
\end{aligned}$$

Vermits $\frac{1}{3}e < 1$ is dit geheel convergent.

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$
Convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} \cdot \frac{3^n \cdot n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3(n+1)} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$\frac{2}{3} < 1$ dus het geheel zal convergeren.

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$
Convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)!}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} < 1$ dus het geheel zal convergeren.

16. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$
Convergentiecriterium van Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{10^n}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(2 + \frac{1}{10^n}\right)^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} (2+0)^{\frac{n+1}{n}} \\
&= 2^1
\end{aligned}$$

Het geheel zal dus divergeren naar ∞

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$
Convergentiecriterium van Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} \\
&= \frac{1}{\infty} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$0 < 1$ dus het geheel zal convergeren.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+2n^2}$
    Vergelijkingscriterium II

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n+2n^2} &\sim \frac{1}{n} \\ \lim_{n\to+\infty} a_n b_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-2}{n+2n^2} \cdot \frac{n}{1} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0, \neq \infty\end{aligned}$$

    De Hyperharmonische reeks is divergent als $p \leq 1$, dus deze reeks is eveneens divergent naar ∞.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$
    Convergentiecriterium van Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{3n-1}\right)^{2n-1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n-1}{n}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

    $\frac{4}{9} < 1$ dus het geheel zal convergeren.

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$
    Convergentiecriterium van D'Alembert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= e\end{aligned}$$

    $e > 1$ dus divergent naar ∞.

21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{3^n}$
Vergelijkingscriterium I

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2(n\alpha)}{3^n}$$

$$a_n = \frac{\cos^2(n\alpha)}{3^n} \quad \leq \quad \frac{1}{3^n} = b_n$$

Vermits $\frac{1}{3^n}$ een meetkundige reeks is met rede $\frac{1}{3}$ (dus zal convergeren) en vermits $a_n \leq b_n$ zal ook a_n convergent zijn. Dit volgt uit vergelijkingscriterium I.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{4}}}$
Convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{5}{4}}} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{5}{4}}} \cdot \frac{n^{\frac{5}{4}}}{\ln(n)} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1-n)}{(n+1)^{\frac{5}{4}}} \cdot n^{\frac{5}{4}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^{\frac{5}{4}} \right) \\
&= \left(0\,(1)^{\frac{5}{4}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$0 < 1$ dus het geheel zal convergeren.

23. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$
Vergelijkingscriterium I

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

Voor elke n groter dan 2 zal $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(\frac{n+1}{n-1}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ en vermits deze laatste convergeert zal de eerste reeks ook convergeren, dit volgt uit vergelijkingscriterium I.

13 Willekeurige Reeksen

Ga na of volgende reeksen absoluut convergent, semi-convergent of divergent zijn.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$
   Uit vergelijkingscriterium II volgt dat

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1} &\sim \frac{1}{n}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= 1 \neq 0 \neq \infty\end{aligned}$$

   Daar deze hyperharmonische reeks (n=1) divergeert, is $\sum|a_n|$ ook divergent. Nu kunnen we verder bepalen of deze reeks semi-convergent is door het Convergentiecterium van Leibniz te onderzoeken.

   (a) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$
   (b) $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$

   Beide voorwaarden zijn voldaan, dus $\sum a_n$ convergeert, het geheel is dus semi-convergent.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-\frac{3}{2}}$
   Uit vergelijkingscriterium II volgt dat

   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}} &\sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= 1 \neq 0 \neq \infty\end{aligned}$$

   Bij deze hyperharmonische reeks is $\frac{3}{2} > 0$ en convergeert $\sum|a_n|$ dit is dus een absoluut convergente reeks.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(1+10^{-n})$
   Uit vergelijkingscriterium I volgt

   $$\begin{aligned}a_n &= 1\\ b_n &= 1+\frac{1}{10^n}\\ a_n &\leq b_n\end{aligned}$$

   Vermits a_n divergeert naar oneindig zal b_n ook divergeren, om te bepalen of deze reeks eventueel nog kan semi-convergent zijn onderzoeken we het convergentiecriterium van Leibniz.

   $$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{10^n} = 1$$

   Het convergentiecriterium van Leibniz is dus niet voldaan, de reeks is divergent.

4. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$
Hierop passen we het integratiecriterium van Cauchy toe. $\frac{\ln n}{n}$ is dalend en continu over $[m, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} f(x)dx &= \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx \\
&= \int_2^{+\infty} \ln(x) d(\ln(x)) \\
&= \left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_2^{\infty} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Deze reeks is zeker niet absoluut convergent. We gaan het convergentiecriterium van Leibniz na om na te gaan of ze eventueel semi-convergent is.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
\text{De l'Hospital} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Leibniz is voldaan dus de gehele reeks is semi-convergent.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n-2}$
Uit vergelijkingscriterium II volgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n-2} &\sim \frac{1}{n} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{1}{10} \neq 0 \neq \infty
\end{aligned}$$

Vermits deze reeks niet alternerend is (voor de opgegeven n waarden) volgt hieruit de divergentie van deze reeks (hyperharmonische reeks is divergent voor n $\leq$ 1).

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{e^n}$
Uit het convergentiecriterium van D'Alembert volgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{e \cdot n^3} \\
&= \frac{1}{e} < 1
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat deze reeks absoluut convergent is.

7. $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$
Uit vergelijkingscriterium II volgt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} &\sim \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= 1\neq 0,\neq\infty\end{aligned}$$

Hieruit volgt de divergentie van deze reeks, we proberen het convergentiecriterium van Leibniz na te gaan om te kijken of deze reeks eventueel semi-convergent is.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$$

Hieruit volgt dat deze reeks semi-convergent is.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2n}$
Deze (niet alternerende)reeks is equivalent met $\frac{1}{2}$ maal de hyperharmonische reeks $\frac{1}{n^k}$ met $k=1$ hieruit volgt de divergentie van de hyperharmonische reeks alsook de gehele opgave.

9. $\frac{3+1}{3\cdot 1}+\frac{3^2+2^3}{3^2\cdot 2^3}\ldots$
Dit is equivalent met:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n\cdot n^3}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

Beide deelreeksen zijn convergent, (de een omdat het een hyperharmonische reeks, de convergentie van de ander volgt uit het convergentiecriterium van D'Alembert). En daar deze reeks geen alternerende reeks is zal het geheel absoluut convergent zijn. Dit steunt op de associativiteit van reeksen.

Onderzoek de convergentie van volgende reeksen en bepaal de algemene term.

10. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}\right)$

Indien $\sum a_n$ convergeert naar S_a en de reeks $\sum b_n$ convergeert naar S_b dan convergeert de somreeks naar $S_a + S_b$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$$

Convergentiecriterium van Cauchy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n+3} \\ &= \frac{1}{3} < 1 \end{aligned}$$

$\sum a_n$ is convergent, zelfs absoluut convergent.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}\right) \end{aligned}$$

Dit tweede deel bestaat uit de som van twee delen die elke absoluut convergent zijn, de ene is een meetkundige reeks met rede $\frac{1}{3}$ en de convergentie van de tweede volgt uit het Convergentiecriterium van Cauchy (dat $\frac{1}{3}$ geeft). Hieruit volgt dat de som van deze 2(eignelijk drie 3) deelreeksen zullen convergeren naar de convergentiesom van de 2 deelreeksen.

Nu bepalen we de algemene term van de som.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{3^n} + \frac{(-1)^n - n}{3^n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n+(-1)^n - n}{3^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{3^n} \end{aligned}$$

Is niet nul als n even is

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^{2n}}{3^{2n}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{9^n} \end{aligned}$$

11. $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\right)$
Hierbij bepalen we eerst de algemene term en leiden daaruit het al dan niet convergent zijn af.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}-\frac{2n-1}{2n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n(2n+1)}-\frac{2n-1}{2n(2n+1)}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-2n-1}{2n(2n+1)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n(2n+1)}
\end{aligned}$$

De algemene term is hier dus $\frac{-1}{2n(2n+1)}$.
Nu bepalen we het al dan niet convergent zijn door middel van vergelijkingscriterium II.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n(2n+1)} &\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4n^2+2n}\\
&= \frac{1}{4}\neq 0\neq\infty
\end{aligned}$$

De algemene term is dus te vergelijken met een hyperharmonische reeks met exponent 2. Een hyperharmonische reeks met exponent twee convergeert dus zal de algemene somterm ook convergeren.
Opmerking: wanneer men bij deze oefening eerste de convergentie van de 2 afzonderlijke reeksen wil bepalen mislukt dit omdat deze reeksen beide divergeren, men is dus verplicht eerst de algemene term te bepalen en aan de hand van deze algemene term de convergentie te onderzoeken.

12. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$
Hierop is dezelfde opmerking van toepassing als bij opgave 12.
We bepalen eerst de algemene term.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n(2n-1)} - \frac{2n-1}{n(2n-1)}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2n+1}{n(2n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(2n-1)}
\end{aligned}$$

De algemene term is $\frac{1-n}{n(2n-1)}$, nu onderzoeken we hiervan het al dan niet convergent zijn.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n(2n-1)} &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-n)}{n(2n-1)} \\
&= -\frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty
\end{aligned}$$

Vermits de hyperharmonische reeks divergeert voor een exponent ≤ 1 zal deze som(verschil)reeks eveneens divergeren.

13. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) : \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$
Om de convergentie van een deling van twee reeksen te bepalen moeten we de deling effectief uitwerken en uit het resultaat de algemene term proberen afleiden, uit het convergentieonderzoek van deze algemene term volgt het al dan niet convergeren van de gehele reeks.
Uitwerking van deze deling: cfr nota's, de uitkomst van deze deling geeft $1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$.
$a_1 = 1$ en $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, de eerste term is als het ware een uitzondering maar het weglaten van een eindig aantal termen tast het al dan niet convergent zijn van een reeks niet aan. Vanaf de tweede term hebben we een meetkundige reeks met rede $\frac{1}{2}$. Deze rede is strikt kleiner dan 1 (in absolute waarde gezien), hieruit volgt dat deze productreeks convergent is.

Onderzoek de convergentie van de volgende reeksen en bepaal de eerste drie termen.

Opm: het product van twee reeksen is convergent wanneer beide reeksen apart convergent zijn op voorwaarde dat minimum 1 van de twee absoluut convergent is.

14. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\right)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}\right)$$

De eerste deelreeks is een hyperharmonische niet-alternerende reeks met exponent strikt groter dan 1. De eerste deelreeks is dus absoluut convergent.
De tweede deelreeks is een alternerende hyperharmonische reeks met een exponent gelijk aan 1, in absolute waarde is deze reeks divergent, maar het convergentiecriterium van Leibniz is voldaan (dalende reeks en $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) dus deze deelreeks is semi-convergent.
De productreeks zal dus convergeren.

$$\begin{aligned}
\sum a_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots \\
\sum b_n &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots \\
\left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) &= -1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \ldots \\
&= -1 + \frac{1}{4} - \frac{23}{72} + \ldots
\end{aligned}$$

15. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

De eerste deelreeks is een meetkundige reeks met rede $q = \frac{1}{3}$. Vermits de rede in absolute waarde strikt kleiner is dan 1 is deze eerste deelreeks absoluut convergent.
De tweede alternerende deelreeks is dezelfde reeks als de eerste deelreeks indien men deze alternerend zou maken, ook deze reeks is absoluut convergent.
Het gevolg hiervan is dat de productreeks eveneens zal convergeren.

$$\begin{aligned}
\sum a_n &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots \\
\sum b_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots \\
\left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) &= 1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\right) \ldots \\
&= 1 + 0 + \frac{1}{9} + \ldots
\end{aligned}$$

16. $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\right)$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\right)$$

De eerste deelreeks is divergent, dus gebaseerd op eigenschappen kunnen we geen besluit formuleren, nu moeten we de productreeks effectief aan uitrekenen en kijken hoe de reeks evolueert.

$$\begin{aligned}
\sum a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \\
\sum b_n &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \ldots \\
\left(\sum a_n\right) \cdot \left(\sum b_n\right) &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right) + \ldots \\
&= 1 + \frac{3}{4} + \frac{107}{216} \ldots
\end{aligned}$$

Deze reeks is voor elke term groter dan de divergente reeks $\frac{1}{n}$, daaruit volgt (via vergelijkinscriterium I) dat deze reeks eveneens divergent is.

14 Reeksen van Functies

Bepaal het convergentiegebied van volgende reeksen van functies:

1. $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$
Deze reeks is een hyperharmonische reeks, van deze reeks is geweten dat ze divergeert als de exponent > 1, het convergentiegebied is dus $]1, +\infty[$.

2. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n}$$
Deze functie is een machtreeks.
Hierop passen we het convergentiecriterium van D'Alembert toe.
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{x^{n+2}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{x^{n+1}}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{2}\right| \\ &= \left|\frac{x}{2}\right|\end{aligned}$$
Deze machtreeks heeft 0 als convergentiemiddelpunt $(x - a)$, is convergent wanneer $|\frac{x}{2}| < 1$ dus de convergentiestraal is 2, het convergentiegebied is dus $]-2, 2[$. Dat dit een open interval is volgt uit het feit dat divergentie optreedt wanneer $x = 2 \vee x = -2$.

3. $(x^2+1) + 2(x^2+1)^2 + 3(x^2+1)^3 \dots$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x^2+1)^n$$
Toepassen van het convergentiecriterium van D'Alembert.
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{(n+1)(x^2+1)^{n+1}}{1}\cdot\frac{1}{n(x^2+1)^n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x^2+1)}{n}\right| \\ &= \left|x^2+1\right| \\ &= x^2+1\end{aligned}$$

$x^2 + 1$ is altijd groter dan of gelijk aan nul maar nul is hier een grenswaarde. Voor $x = 0$ is de limiet gelijk aan 1 en geeft het convergentiecriterium van D'Alembert geen uitkomst, dit geval moeten we apart nagaan.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Hieruit volgt dat het convergentiegebied van deze functie gegeven is door $\varnothing$. Met andere woorden, deze functie is nergens convergent.

4. $1 + \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{3x}} + \ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$$

Dit is een meetkundige reeks met rede $q = \frac{1}{e^x}$. De meetkundige reeks heeft als eigenschap dat ze convergeert wanneer $|q| < 1$. Voor elke waarde groter dan 0 is deze voorwaarde voldaan, het convergentiegebied wordt metgevolg $]0, +\infty[$. Dit volgt eveneens uit toepassing van het convergentiecriterium van D'Alembert.

5. $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \frac{4}{16x^4} \cdots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n x^n}$$

Deze reeks werken we eveneens uit met het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n+1}{2^{n+1}x^{n+1}} \cdot \frac{2^n x^n}{n} \right) \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2xn} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2x} \right| \end{aligned}$$

Deze reeks is convergent als $|\frac{1}{2x}| < 1$, dus wanneer $x > \frac{1}{2} \vee x < -\frac{1}{2}$. De grensgevallen $x = \frac{1}{2}$ en $x = -\frac{1}{2}$ moeten apart onderzocht worden. Voor $x = \frac{1}{2}$ krijgen we:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

Voor $x = -\frac{1}{2}$ krijgen we:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$$

In beide grensgevallen treedt divergentie op, het convergentiegebied is dus $]-\infty,-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},+\infty[$.

6. $1+\frac{x}{1-x}+\left(\frac{x}{1-x}\right)^2+\left(\frac{x}{1-x}\right)^3\dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$$

Deze reeks werken we eveneens uit met het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{\left(\frac{x}{1-x}\right)^{n+1}}{1}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x}{1-x}\right)^n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1-x}\right| \\ &= \left|\frac{x}{1-x}\right|\end{aligned}$$

Deze reeks is dus convergent wanneer $|\frac{x}{1-x}|<1$, dus wanneer $x<\frac{1}{2}$, het grensgeval $x=\frac{1}{2}$ onderzoeken we nu apart.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1)^n$$

In het grensgeval krijgen we een meetkundige reeks met rede $q=1$, in de grenswaarde is de reeks dus divergent.
Het convergentiegebied van deze reeks is $]-\infty,\frac{1}{2}[$.

7. $\sum\frac{(-1)^n}{n3^n(x-5)^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n3^n(x-5)^n}$$

Hierop passen we het convergentiecriterium van D'Alembert toe.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,3^{n+1}\,(x-5)^{n+1}}\cdot\frac{n3^n\,(x-5)^n}{(-1)^n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-n}{(n+1)\,3\,(x-5)}\right| \\ &= \left|\frac{-1}{3\,(x-5)}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right| \\ &= \left|\frac{-1}{3\,(x-5)}\right|\end{aligned}$$

Deze reeks is convergent wanneer $|\frac{-1}{3(x-5)}| < 1$. Deze voorwaarde is voldaan wanneer $x < \frac{14}{3} \vee x > \frac{16}{3}$, de grenswaarden $x = \frac{14}{3}$ en $x = \frac{16}{3}$ worden nu apart onderzocht.
Voor $x = \frac{14}{3}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(\frac{14}{3}-5)^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(\frac{14}{3}-\frac{15}{3})^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(-\frac{1}{3})^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Deze hyperharmonische reeks is divergent.
Voor $x = \frac{16}{3}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(\frac{16}{3}-5)^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(\frac{16}{3}-\frac{15}{3})^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n(\frac{1}{3})^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

Deze alternerende hyperharmonische reeks is divergent, maar het uit het convergentiecrierium van Leibniz (dalend en de algemene term in limiet gaat naar nul) volgt dat deze semi-convergent is. Metgevolg is het convergentiegebied van deze reeks gegeven door $]-\infty, \frac{14}{3}[\cup[\frac{16}{3}, +\infty[$

8. $(x-1) + 2!(x-1)^2 + 3!(x-1)^3 + \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(x-1)^n$$

Deze functie is een machtreeks
Toepassing van het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\left((n+1)!\,(x-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!\,(x-1)^n}\right)\right| \\
&= \lim_{n\to\infty} |(n+1)\,(x-1)| \\
&= |(x-1)\,\infty|
\end{aligned}$$

Deze functie is ten alle tijde divergent, ook in het onbepaalde geval $(0 \cdot \infty)$. Deze functie is dus enkel convergent in het convergentiemiddelpunt, hieruit volgt dat het convergentiegebied gelijk is aan het singleton $\{1\}$.

9. $1 + \frac{x-3}{1} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} + \dots$
Niet te schrijven onder een algemene vorm die alle termen bevat, maar het weglaten van een eindige aantal termen beïnvloedt het al dan niet convergeren van een reeks niet.

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$$

We passen D'Alembert toe op de reeks (dus de eerste term laten we buiten beschouwing).

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x-3)^n} \right) \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-3) \cdot n^2}{(n+1)^2} \right|
\end{aligned}$$

De voorwaarde voor convergentie $|x-3| < 1$ is voldaan wanneer $x < 4 \wedge x > 2$. De grenspunten $x = 2$ en $x = 4$ gaan we nu apart na.
Voor $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Dit is een alternerende hyperharmonische reeks met een exponent $= 2$. De reeks convergeert dus wanneer $x = 2$.
Voor $x = 4$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-3)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^2}$$

Dit is een niet alternerende hyperharmonische reeks met een exponent $= 2$. De reeks convergeert eveneens wanneer $x = 4$. Het convergentiegebied van deze functie is dus $[2, 4]$. Het convergentiemiddelpunt van deze functie is 3 en de convergentiestraal 2.

10. $\frac{x^2}{(\ln(2))^2} + \frac{x^3}{(\ln(2))^3} + \frac{x^4}{(\ln(2))^4} + \ldots$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln(n))^n}$$

Hierop passen we het convergentiecriterium van Cauchy toe.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{(\ln(n))^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(\ln(n))} \\ &= 0 (\forall x \in \mathbb{R}_0) \end{aligned}$$

Het convergentiemiddelpunt is 0 en de convergentiestraal $= \infty$. Deze reeks is convergent over gans $\mathbb{R}$.

11. $\frac{x+1}{2} + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3} + \frac{(x+1)^4}{4\cdot 2^4} + \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}$$

We passen het convergentiecriterium van D'Alembert toe.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\left(\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(x+1)^n}\right)\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(x+1)}{(n+1)\cdot 2}\right| \\ &= \left|\frac{x+1}{2}\right| \end{aligned}$$

Deze reeks convergeert wanneer $|\frac{x+1}{2}| < 1$, dit is voldaan wanneer $x > -3 \wedge x < 1$, de grenswaarden $x = -3$ en $x = 1$ onderzoeken we nu apart.
Voor $x = -3$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n \cdot 2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \end{aligned}$$

Deze alternerende hyperharmonische reeks is niet absoluut divergent, we controleren of ze niet semi-convergent kan zijn door het convergentiecriterium van Leibniz na te gaan. Vermits deze reeks dalend is en

ze in limiet nul is mogen we besluiten dat deze reeks semi-convergent is.
Voor $x = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1)^n}{n \cdot 2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n \cdot 2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Deze hyperharmonische reeks is divergent.
Het convergentiegebied is gegeven door $[-3, 1[$, de convergentiestraal is 2 en het convergentiemiddelpunt is -1.

12. $\sum \left(\frac{x}{2-x^2}\right)^n$

$$\sum \left(\frac{x}{2-x^2}\right)^n$$

We passen hier het convergentiecriterium van Cauchy toe (het is iets korter dan D'Alembert in deze situatie).

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{x}{2-x^2}\right)^n} \\ &= \frac{x}{2-x^2} \end{aligned}$$

Wanneer $x < -2 \vee (x > -1 \wedge x < 1) \vee x > 2$ voldaan is, is de voorwaarde $|\frac{x}{2-x^2}| < 1$ ook voldaan. De grensvoorwaarden $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ en $x = 2$ moeten we nog apart onderzoeken.
Voor $x = -2$

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{-2}{2-(-2)^2}\right)^n &= \sum \left(\frac{-2}{2-4}\right)^n \\ &= \sum \left(\frac{-2}{-2}\right)^n \\ &= \sum 1^n \end{aligned}$$

In deze grenswaarde is de reeks divergent.
Voor $x = -1$

$$\begin{aligned} \sum \left(\frac{-1}{2-(-1)^2}\right)^n &= \sum \left(\frac{-1}{2-1}\right)^n \\ &= \sum \left(\frac{-1}{1}\right)^n \\ &= \sum (-1)^n \end{aligned}$$

In deze grenswaarde is de reeks divergent.
Voor $x = 1$

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{1}{2-1^2}\right)^n &= \sum\left(\frac{1}{2-1}\right)^n \\ &= \sum\left(\frac{1}{1}\right)^n \\ &= \sum 1^n\end{aligned}$$

In deze grenswaarde is de reeks divergent.
Voor $x = 2$

$$\begin{aligned}\sum\left(\frac{2}{2-2^2}\right)^n &= \sum\left(\frac{2}{2-4}\right)^n \\ &= \sum\left(\frac{2}{-2}\right)^n \\ &= \sum(-1)^n\end{aligned}$$

In deze grenswaarde is de reeks divergent.
Deze reeks is dus convergent in het gebied $]-\infty,-2[\cup]-1,1[\cup]2,+\infty[$.

15 Ontwikkelen van functies in machtreeksen

1.a Stel de Mc-Laurinreeks op voor $\frac{1}{1+x}$.

i	$f^i(x)$	$f'(0)$	$\frac{x^i}{i!}$	term
0	$\frac{1}{1+x}$	1	1	1
1	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1	x	-x
2	$\frac{2}{(1+x)^3}$	2	$\frac{x^2}{2}$	x^2
3	$-\frac{6}{(1+x)^4}$	6	$\frac{x^3}{6}$	$-x^3$
4	$\frac{24}{(1+x)^5}$	24	$\frac{x^4}{24}$	x^4

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i\end{aligned}$$

Deze reeksontwikkeling is enkel bruikbaar in het gebied waar de reeks convergeert, in dit geval is dit geldig $\forall x; x \in]-1, 1[$ (als het grondtal van de exponent absoluut strikt kleiner is dan 1).

1.b Gebruik deze reeks om de Mc-Laurinreeks voor $\frac{1}{2-x}$ op te stellen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+X}\end{aligned}$$

Hierbij is $X = -\frac{x}{2}$, we subsitueren dit in de reeksontwikkeling van $\frac{1}{1+x}$ maal $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i X^i \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \left(-\frac{x}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \cdot (-1)^i \left(\frac{x}{2}\right)^i \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^i\end{aligned}$$

Deze reeks is convergent $\forall x; x \in]-2, 2[$.

1.c Gebruik vorige reeks om $\frac{1}{(1+x)\cdot(2-x)}$ in een Mc-Laurinreeks te ontwikkelen.
Vermits de reeksen uit 1.a en 1.b beide convergent zijn rond $x = 0$ en de convergentiestralen gelijk zijn aan respectievelijk 1 en 2, volgt hieruit en uit de eerste eigenschap dat de productreeks convergent zal zijn rond $x = 0$ en convergentiestraal 1 zal hebben met andere woorden zal convergeren $\forall x; x \in]-1, 1[$.
Eerst schrijven we een aantal termen van beide reeksen uit en berekenen we zo de productreeks.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \\
\frac{1}{2-x} &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2^2} + \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + \dots \\
\frac{1}{(1+x)\cdot(2-x)} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{x}{2^2} - \frac{x}{2}\right) + \\
&\quad \left(\frac{x^2}{2^3} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^2}{2}\right) + \\
&\quad \left(\frac{x^3}{2^4} - \frac{x^3}{2^3} + \frac{x^3}{2^2} - \frac{x^3}{2}\right) \dots \\
&= \frac{1}{2} - \frac{x}{2^2} + \frac{3x^2}{2^3} - \frac{5x^3}{2^4} \dots \\
&= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) x^n
\end{aligned}$$

2.a Ontwikkel $f(x) = Bgtx(\frac{x}{2})$ in een Mc-Laurinreeks.

$$\begin{aligned}
(Bgtg(\frac{x}{2}))' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \\
Bgtg(\frac{x}{2}) &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^n dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{4^n} \cdot \int_0^x x^{2n} dx \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}
\end{aligned}$$

Deze reeks is convergent wanneer $-2 < x < 2$, dit volgt na toepassing van het convergentiecriterium van D'Alembert.

3.a Stel de Mc-Laurinreeks op voor $\ln(1+x)$.

i	$f^i(x)$	$f^i(0)$	$\frac{x^i}{i!}$	term
0	$\ln(1+x)$	0	1	0
1	$\frac{1}{1+x}$	1	x	x
2	$\frac{-1}{(1+x)^2}$	-1	$\frac{x^2}{2!}$	$-\frac{x^2}{2}$
3	$\frac{2}{(1+x)^3}$	2	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^3}{3}$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}\\ &\quad \forall x \in]-1,1]\end{aligned}$$

3.b Gebruik deze reeks om $\ln(\frac{1+x}{1-x})$ in een Mc-Laurinreeks te ontwikkelen.

$$\begin{aligned}\ln(\frac{1+x}{1-x}) &= \ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(-x)^n}{n}\end{aligned}$$

Als n even is, is de term nul, enkel de oneven waarden van n zijn dus relevant voor het bepalen van de algemene term.

$$\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Deze reeks is enkel bruikbaar in het interval $]-1,1[$.

3.c Ontwikkel $\ln(x)$ in een Taylorreeks rond $x=2$.

$$\begin{aligned}\ln(x) &= \ln((x-2)+2)\\ &= \ln(2(1+(\frac{x-2}{2})))\\ &= \ln(2)+\ln(1+(\frac{x-2}{2}))\\ &= \ln(2)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^n\frac{1}{n}\end{aligned}$$

Hierbij moet

$$\begin{aligned}-1 < \frac{x-2}{2} \leq 1\\ 0 < x \leq 4\end{aligned}$$

Dus: $\forall x \in]0,4]$.

4.a Ontwikkel $\frac{1}{(1+x)^3}$ in een Mc-Laurinreeks.

i	$f^i(x)$	$f^i(0)$	$\frac{x^i}{i!}$	term
0	$\frac{1}{(1+x)^3}$	1	1	1
1	$\frac{-3}{(1+x)^4}$	-2	x	$-2x$
2	$\frac{12}{(1+x)^5}$	12	$\frac{x^2}{2!}$	$6x^2$
3	$\frac{-60}{(1+x)^6}$	-60	$\frac{x^3}{3!}$	$-10x^3$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$
$$\forall x \in]-1,1[$$

5.a Ontwikkel $\cos(x)$ in een Taylorreeks rond $x = \frac{\pi}{2}$.

i	$f^i(x)$	$f^i(\frac{\pi}{2})$	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^i}{i!}$	term
0	$\cos(x)$	0	1	0
1	$\sin(x)$	1	$x-\frac{\pi}{2}$	$x-\frac{\pi}{2}$
2	$-\cos(x)$	0	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!}$	0
3	$-\sin(x)$	-1	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}$	$-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}$
4	$\cos(x)$	0	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^4}{4!}$	0
5	$\sin(x)$	1	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!}$	$\frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\forall x \in]-\infty,+\infty[$$

6.0 Bepaal de eerste vier van 0 verschillende termen van de Mc-Laurin-ontwikkeling van $e^x \sin(x)$:

6.a Door gebruikt te maken van gekende Mc-Laurinreeksen
We schrijven eerst een aantal termen uit van e^x en van $\sin(x)$ waaruit we de productreeks proberen te bepalen.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\ldots \\
\sin(x) &= 0+x+0-\frac{-x^3}{6}+0+\frac{x^5}{120}+0-\ldots \\
e^x\cdot\sin(x) &= 0+x+x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^4 \\
&\quad +\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}\right)x^5+\ldots
\end{aligned}$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \dots$$

6.b Door toepassing van de algemene formule

i	$f^i(x)$	$f^i(0)$	$\frac{x^i}{i!}$	term
0	$e^x \sin(x)$	0	1	0
1	$e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$	1	x	x
2	$2e^x \cos(x)$	2	$\frac{x^2}{2!}$	x^2
3	$2(e^x \cos(x) - e^x \sin(x))$	2	$\frac{x^3}{3!}$	$\frac{x^3}{3}$
4	$-4e^x \sin(x)$	0	$\frac{x^4}{4!}$	0
5	$-4(e^x \sin(x) + e^x \cos(x))$	-4	$\frac{x^5}{5!}$	$\frac{x^5}{30}$

$$e^x \sin(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 \dots$$

7.a Ontwikkel e^x in een Taylorreeks rond $x = 4$.

$$\begin{aligned} e^x &= e^{(x-4)+4} \\ &= e^4 e^{x-4} \\ &= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n!} \\ &\quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

8.a Ontwikkel $\cos^2(x)$ in een Taylorreeks rond $x = \frac{\pi}{4}$ m.b.v een gekende Mc-Laurinreeks.

$$\begin{aligned} \cos^2(x) &= \frac{1+\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2((x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4})) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(2(\frac{\pi}{4} - x)) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(2(x - \frac{\pi}{4})) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)^{2n+1} \\ &\quad \forall x \in]-\infty, +\infty[\end{aligned}$$

8.b Bepaal de eerste 4 termen door gebruik te maken van de algemene formule en controleer met het vorige

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 0 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots$$

8.c Gebruik de lineair benadering om $\cos^2(1)$ te bepalen, geef een bovengrens voor de gemaakte fout.
De lineaire benadering van is gegeven door $\frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, de fout op deze benadering is $< \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$.

$$\begin{aligned} \cos^2(1) &= \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \pm \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)^3 \\ &= 0.285398 \pm 0.006589 \end{aligned}$$

9.0 Bereken tot op 3 decimalen nauwkeurig

9.a $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x)^{2n}}{n!} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{5} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{7} + \ldots \\ &= 0.742 \end{aligned}$$

(Nauwkeurig tot 2 decimalen, om correct te zijn op 3 decimalen moet de volgende term < 0.0005)

9.b $\int_0^1 \sqrt{x} \sin(x^2) dx$

10 Voor welke waarden van x is $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ tot op 5 cijfers na de komma.

16 Fourierreeksen

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\sum(x) & = & \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{L}+b_k\sin\frac{k\pi x}{L}\right)\\ L & = & \frac{b-a}{2}\\ a_0 & = & \frac{1}{L}\int_a^b f(x)dx\\ a_k & = & \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx\\ b_k & = & \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx\end{array}}$$

1. Ontwikkel $f(x) = |x|$ in een fourierreeks over $[-\lambda, \lambda]$.
2. Ontwikkel $f(x) = 0$ voor $x \in]-\pi, 0[$ en $f(x) = x$ voor $x \in [0, \pi]$ in een fourierreeks.
3. Ontwikkel $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ over $[0, \pi]$ in een fourier-cosinusreeks.
4. Ontwikkel $f(x) = \pi - 2x$ over $[0, \pi]$ in
   - een fourier-sinusreeks
   - een fourier-cosinusreeks
5. Ontwikkel $f(x) = x^2$ in een fourierreeks over $[-\lambda, \lambda]$.
   Opmerking: hier bepalen we de fourierreeks over het interval $[-\pi, \pi]$.

$$L = \pi$$

Daar dit een even functie is, is de term $b_k = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}\\ &= \frac{2\pi^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi} \pi x^2 \cos\frac{k\pi x}{\pi}dx\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(kx)dx\\ &= \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\left(\sin\left(kx\right)\right)\\ &= \frac{2}{k\pi}\left[x^2\sin(kx)\right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)dx \\
= & \frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi} xd\left(\cos\left(kx\right)\right) \\
= & \frac{4}{k^2\pi}\left[x\cos\left(kx\right)\right]_0^{\pi} \\
& -\frac{4}{k^2\pi}\int_0^{\pi}\cos kxdx \\
= & \frac{4}{k^2\pi}\left(\pi\cos(k\pi)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\sum(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}(-1)^k\cos(kx)
$$

6. Translatie n.t.k.

7. Bepaal de fourierreeks van de zaagtandspanning zoals gegeven in de inleiding, rekening houdende met $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.